

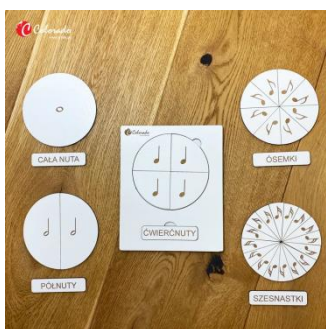
(Nie)bezpieczne związki matematyki i muzyki.

Większość z nas zgodnie twierdzi, że muzyka jest Sztuką... lub, że większość gatunków muzycznych jest Sztuką. Na pytanie: czy matematykę też można włączyć do zbioru „Sztuka” większość matematyków odpowie: oczywiście.

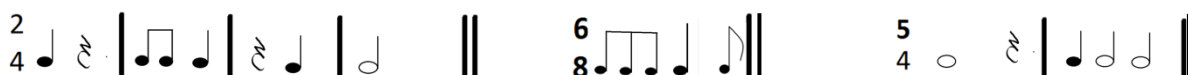
Jeśli tak - jakie wspólne elementy można odnaleźć? Czy i jak matematyka wpływa na muzykę i odwrotnie?

Matematyka i teoria muzyki.

Wpływy matematyki można odnaleźć poprzez badanie elementarnej wiedzy z zakresu teorii muzyki. Pierwszym przykładem jest ustalony porządek notacji muzycznej: *podział wartości rytmicznych, tworzenia rytmu w określonym metrum*. Ilość wartości rytmicznych i ich długość trwania musi się zgadzać – poprzez sumowanie ich – by wykorzystać założone *metrum* – zbiory.



Pauza całonutowa	— =	○	Trwa tyle co cała nuta
Pauza półnutowa	— =	◐	Trwa tyle co półnuta
Pauza ćwierćnutowa	— =	◑	Trwa tyle co ćwierćnuta
Pauza ósemkowa	— =	◒	Trwa tyle co ósemka
Pauza szesnastkowa	— =	◔	Trwa tyle co szesnastka



Ustalono wzorzec dźwięku $a^1 = 440$ Hz, a za pomocą wzoru matematycznego określono stosunek odległości kolejnych dźwięków oddalonych od siebie o pół tonu: $q = \sqrt[12]{2}$. Za pomocą tych obliczeń dźwięk $h^1 = 493,9$ Hz, $c^2 = 523,2$ Hz itd.

Dodawanie i odejmowanie *półtonów* tworzy inne *interwały i akordy*. Wystarczy zmienić kolejność *interwałów* i tworzone są różnie brzmiące *akordy durowy lub molowy*:

akord durowy: 3 w (tercja wielka – 4 półtony) + 3 m (tercja mała – 3 półtony),
akord molowy: 3 m (tercja mała – 3 półtony) + 3 w (tercja wielka – 4 półtony).



W baroku stosowano bas cyfrowany, który za pomocą cyfr i znaków chromatycznych nakazywał odpowiedni sposób budowania całego akordu. Instrumentalista w zapisie nutowym widział dźwięki zapisane w kluczu basowym (druga pięciolinia) i pod spodem cyfry określające odległości następnych dźwięków.

Matematyka w historii muzyki.



W historii muzyki znane są przykłady wpływu muzyki na odkrycia matematyczne. Pitagorejczycy badali relacje pomiędzy liczbami. Dzięki *monochordowi* doświadczali harmonii współbrzmienia dźwięków i analizowali stosunki pomiędzy nimi. Wykazali, że taka relacja to stosunek będących ilorazem niewielkich liczb naturalnych.

Wiele kompozycji można analizować w odniesieniu do treści matematycznych.



W utworach polifonicznych Bacha motywy muzyczne są przedstawiane w czasie trwania w *odbiciu*, *symetrii* lub *translacji*. Takie imitacyjne przeprowadzenie tematu w różnych głosach bardzo czytelnie można rozpoznać w *Inwencji dwu-głosowej d-moll*.

Canones diversi super thema regium.



Przykładem palindormu będzie kanon krabowy, w którym linia muzyczna jest wykonywana w dwugłosie: głos pierwszy – wykonanie od początku, głos drugi - od tyłu.

Mozart ucząc się matematyki notował rozwiązania i liczby w różnych miejscach pokoju, a na marginesach swoich kompozycji rozwiązywał równania matematyczne i obliczał szanse wygrania w loterii. Eksperymentował z doświadczeniami losowego układania taktów poprzez rzucanie kostką i losowanie kolejnych taktów kompozycji, by tworzyć nową.

Złoty podział odcinka to podział odcinka na dwie części tak, by stosunek długości dłuższej z nich do krótszej był taki sam, jak całego odcinka do części dłuższej.

Amerykański matematyk z Alma College - John Putz badał zastosowanie takiego złotego podziału w mozartowskich sonatach. W klasycyzmie sonata miała wyraźną trójdzielną formę. Pierwsza część - *ekspozycja* to dwa kontrastujące tematy, część druga - *przetworzenie* to swobodna interpretacja tematów pod względem melodycznym, rytmicznym, harmonicznym i fakturalnym, ostatnia część - *repryza* to powrót tematów głównych. Powstaje pytanie, czy Mozart zastosował w swoich sonatach złoty podział, traktując ekspozycję jako krótszy, a przetworzenie i repryzę jako dłuższy odcinek utworu. Poprzez analizę tych sonat Putz potwierdził swoją tezę, iż Mozart dzielił Sonaty w złotych podziałach ilość taktów w częściach. Przykładem jest I Sonata KV 279:

Ekspozycja (część I) – 38 taktów

Przetworzenie + repryza (część II i III) – 62 takty

Razem – 100 taktów

$$\frac{a+b}{b} - 1,6129$$

$$\frac{b}{a} - 1,6316$$

Pojęcie matematycznej translacji (przesunięć bez deformacji) w muzycznej przestrzeni to polifoniczna imitacja, ostinata rytmiczna i melodyczna, progresja melodii w przesunięciu o kolejne dźwięki czy transkrypcja zmiany tonacji oryginalnej. Wszystkie te przykłady są potwierdzeniem ścisłych związków matematyki i muzyki.

Ostinata jako powtórzonych odbić widoczne są w takich utworach jak:



Bolero - Ravela z powtarzającym się motywem rytmicznym granym przez werbel oraz motyw melodyczny grany przez różne instrumenty,



W grocie króla gór – Griega z powtarzającym motywem muzycznym oraz w melodii przesuniętej w progresji.

Współczesna muzyka a matematyka.

Późniejsze dodekafoniczne doświadczenia muzyczne odrzucenia harmonii, tonalności na rzecz równoważnych dźwięków opartych o serie 12 dźwięków z seriami i rachunkiem prawdopodobieństwa uzyskania takich samych kompozycji: $11! + = 1 * 2 * 3 * \dots * 11 = 39\ 916\ 800$

Ciąg Fibonacciego – ciąg liczb naturalnych określony rekurencyjnie w sposób następujący: pierwszy wyraz jest równy 0, drugi jest równy 1, każdy następny jest sumą dwóch poprzednich.

Myślenie koncepcyjne według ciągu Fibonacciego stało się podstawą utworu *Lateralus* zespołu Tool, w którym każdy następny wers miał liczbę sylab, która odpowiada kolejnym wyrazom w ciągu: zaczynając od dwóch „jedynek”, przez 2, potem 3, następnie 5, aż dochodzimy do 13 sylab na wers i cykl się odwraca.

Wykorzystanie algorytmów do stworzenia sztucznej inteligencji komponującej utwory muzyczne - AIVA Artificial Intelligence Virtual Artist to baza ponad 15 tysięcy utworów domeny publicznej, Shimon Robotic – wirtuoz gry na marimbie opracowany na podstawie bazy 5000 utworów muzyki jazzowej i klasycznej oraz 2 milionów riffów.

Takich odniesień i związków nie wyczerpuje ten krótki artykuł. Jeszcze jest wiele przykładów tu nie poruszonych jak np.: twórczość Iannis Xenakisa.

Innym obszarem jest wpływ odbioru muzyki na rozwój intelektualny. Przykładem mogą być doświadczenia eksperymentalnego poznawania nowych treści z równoczesnym słuchaniem muzyki barokowej co ma pozytywny wpływ na przyswajanie tej wiedzy.

Zachodzi pytanie: czym kierują się lekarze, którzy w trakcie skomplikowanej operacji, dla większego skupienia słuchają muzyki? Dlaczego literacki Sherlock Holmes i wybitny Albert Einstein – grali na skrzypcach? Te rozważania pozostawmy jako przyczynek do następnego spotkania...

Przygotowanie materiału:

Agnieszka Gietner - nauczyciel doradca metodyczny ds. muzyki a.gietner@mcdn.edu.pl
Małopolskie Centrum Doskonalenia Nauczycieli Ośrodek w Krakowie www.mcdn.edu.pl
31-131 Kraków, Ul. Garbarska 1 Tel. 12 422 93 06 wew.139

Bibliografia:

Roczniki Kulturoznawcze: 7/2016 **O relacjach między matematyką a muzyką** Tomasz Grębski

www.spidersweb.pl

<http://meakultura.pl/artukul/matematyka-muzyki-muzyka-matematyki-873>

www.wikipedia.pl

<https://www.researchgate.net/>

<https://www.pinterest.cl/>