MAŁOPOLSKA

Zamiast wstępu

INSTYTUCJA WOJEWÓDZTWA MAŁOPOLSKIEGO

Dorota Długosz nauczyciel konsultant MCDN Ośrodek w Oświęcimiu

MAŁOPOLSKA

Czy istnieje matematyczny przepis na piękno?

„Matematycznie połączeni.

O odkrywaniu pozornie ukrytych zależności"

9 czerwca 2020

Dorota Długosz
Nauczyciel konsultant ds. matematyki
MCDN Ośrodek w Oświęcimiu

MCDN www.mcdn.edu.pl
INSTYTUCJA WOJEWÓDZTWA MAŁOPOLSKIEGO

Grecka geometria ma dwa wielkie skarby: twierdzenie Pitagorasa i „złotą proporcję”. To pierwsze jest jak złoto, a drugie, to drogocenny klejnot.

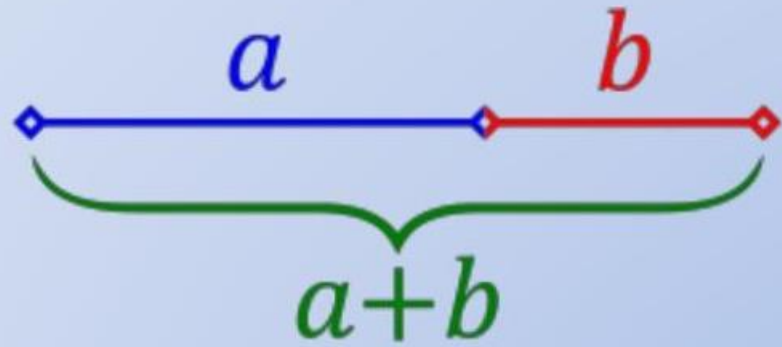
Johanes Kepler (1571 – 1630)

Źródło: https://pl.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler

MCDN www.mcdn.edu.pl INSTYTUCJA WOJEWÓDZTWA MAŁOPOLSKIEGO

MAŁOPOLSKA

Czym jest „złoty podział” odcinka?



$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

INSTYTUCJA WOJEWÓDZTWA MAŁOPOLSKIEGO

Własności „złotej liczby”

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \varphi$$

$$\varphi = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

Odwrotność liczby jest od niej o 1 mniejsza.

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

Własności „złotej liczby”

Ułamek łańcuchowy, postać rekurencyjna liczby

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}}$$

Własności „złotej liczby”

To jeszcze nie wszystko:

$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$

pomnóżmy obustronnie przez φ i otrzymamy:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

Kwadrat „złotej liczby” jest od niej o 1 większy.

Własności „złotej liczby”

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które bez trudu rozwiążą uczniowie ze szkoły ponadpodstawowej.

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

Otrzymamy dwa rozwiązania:

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

INSTYTUCJA WOJEWÓDZTWA MAŁOPOLSKIEGO

MAŁOPOLSKA

Własności „złotej liczby”

Ponieważ mówimy o stosunku długości odcinków, czyli interesuje nas tylko rozwiązanie dodatnie, a zatem ….

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Wartość „złotej liczby” w przybliżeniu, to **1,618033988…**

MCDN www.mcdn.edu.pl INSTYTUCJA WOJEWÓDZTWA MAŁOPOLSKIEGO

Ciąg Fibonacciego, a liczba φ

Oto kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego: 1,1, 2, 3,…

a dalej: 5, 8, 13, 21,…, bo 1+1=2;

2+3=5

3+5=8

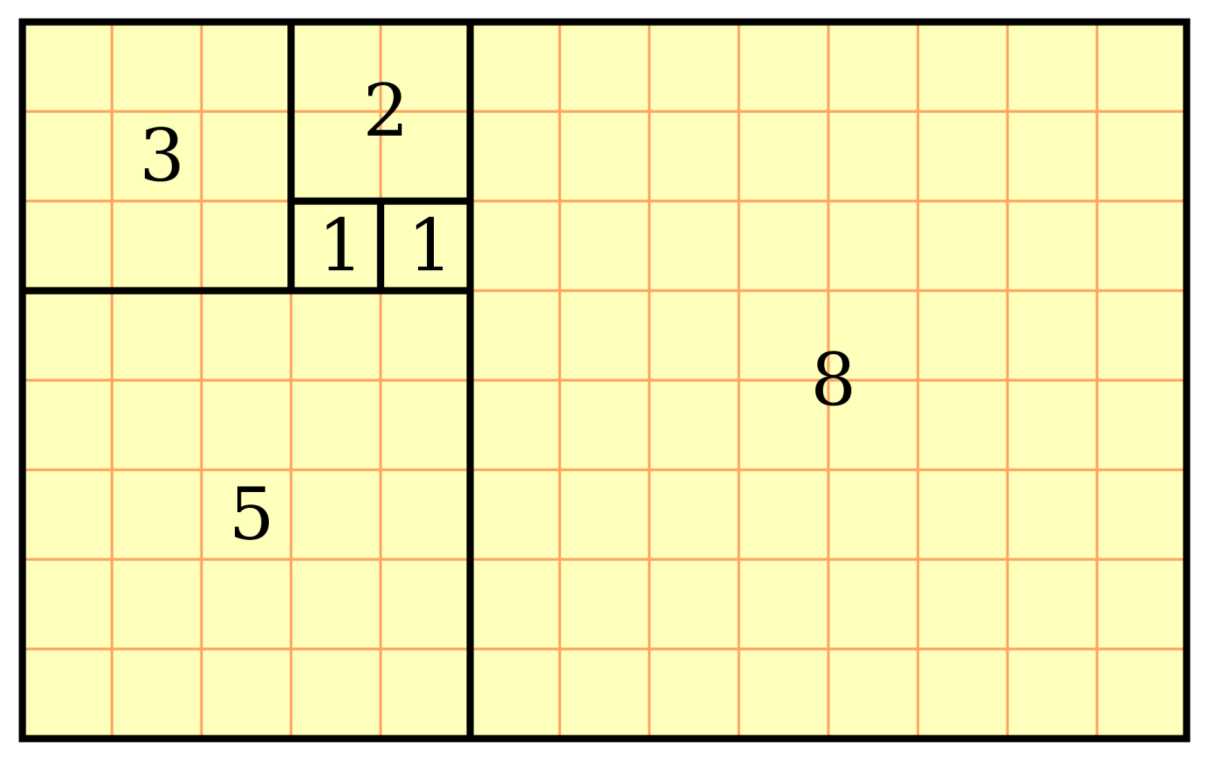
5+8 = 13

8+13=21…

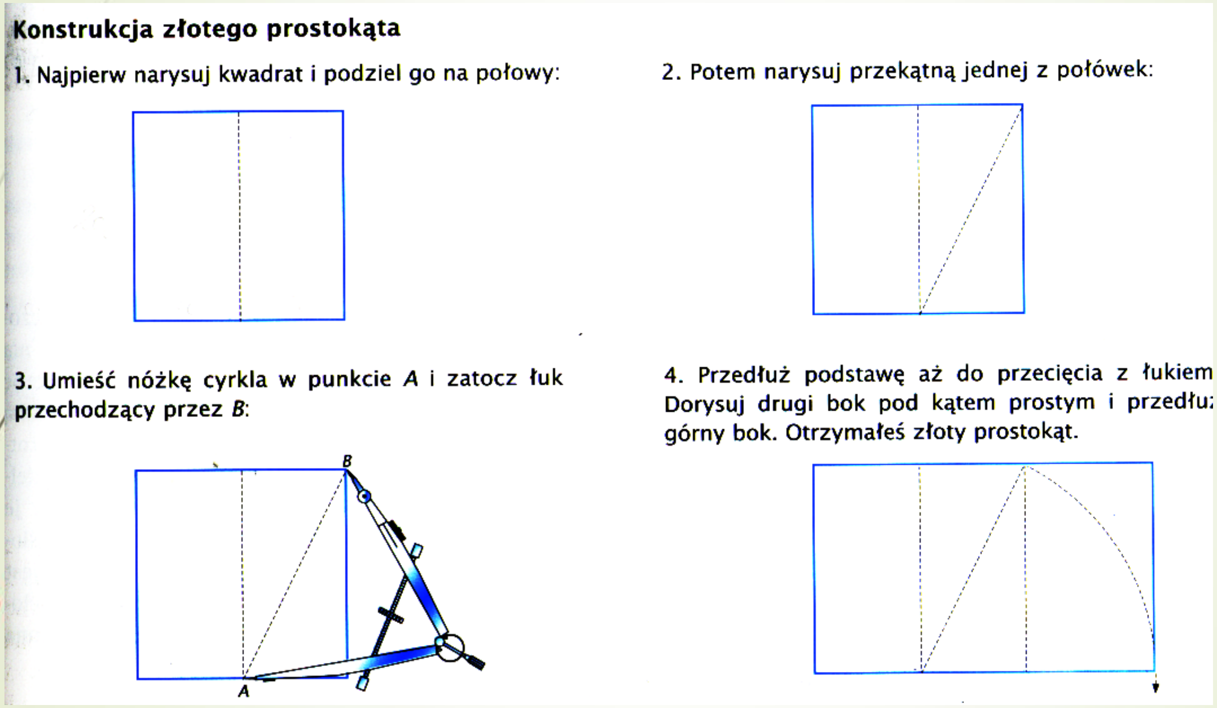
czyli …,34, 55, 89, 144, 233, …

MAŁOPOLSKA

Liczby Fibonacciego mogą posłużyć do konstrukcji złotego prostokąta



Złoty prostokąt może mieć dowolną szerokość, ale jego długość powinna stanowić nieco ponad 1,6 szerokości.



Konstrukcja złotego prostokąta

1. Najpierw narysuj kwadrat i podziel go na połowy:

2. Potem narysuj przekątną jednej z połówek:

3. Umieść nóżkę cyrkla w punkcie *A* i zatocz łuk przechodzący przez *B*:

4. Przedłuż podstawę aż do przecięcia z łukiem. Dorysuj drugi bok pod kątem prostym i przedłu górny bok. Otrzymałeś złoty prostokąt.

Źródło: „ścieżki matematyki” N. Langdon, Ch. Snape. GWO 1998r.

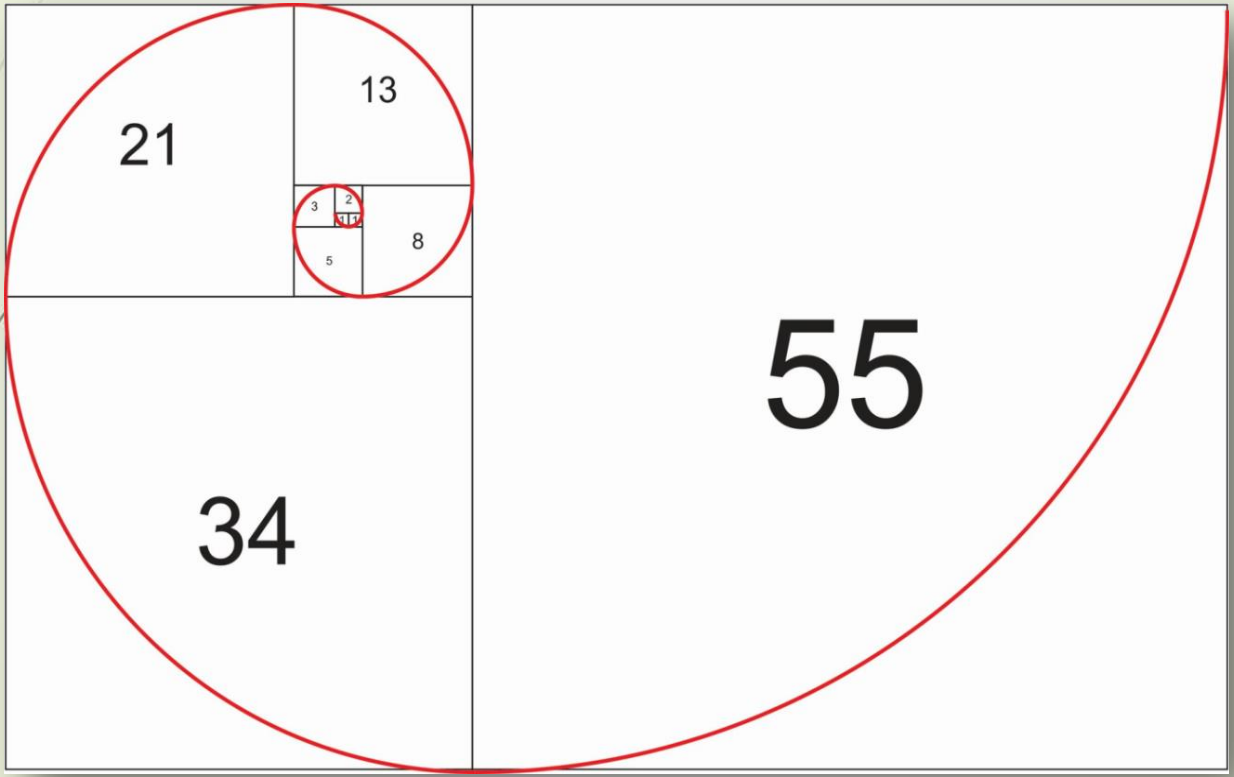
Związek ciągu Fibonacciego ze „złotą liczbą”

Jeżeli obliczymy kolejne ilorazy sąsiednich wyrazów ciągu Fibonacciego, f_{n+1} przez f_n , to coraz bliżej jesteśmy „złotej liczby”…

$$\frac{1}{1} = 1;\ \frac{2}{1} = 2;\ \frac{3}{2} = 1{,}5;\ \frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$$

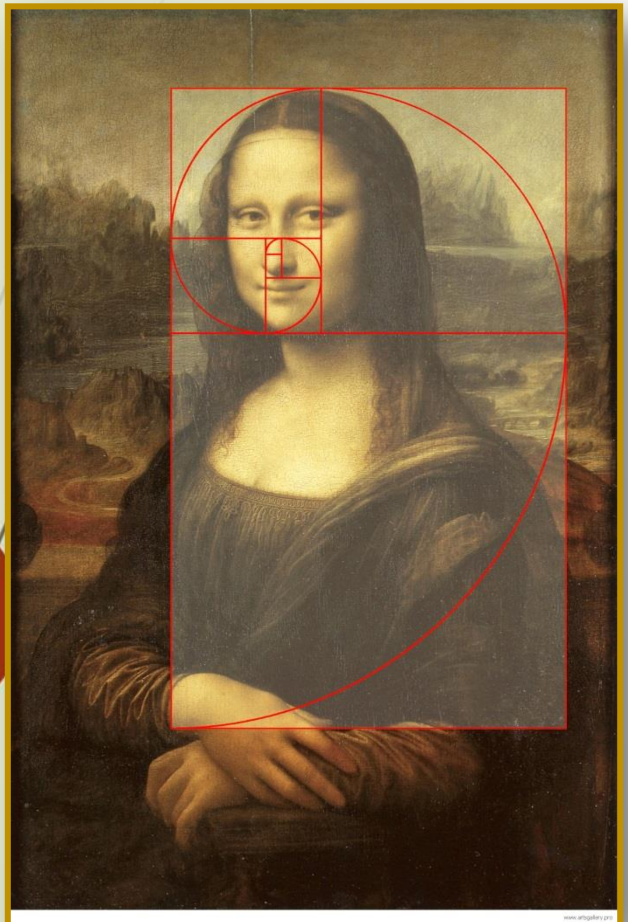
$$\frac{8}{5} = 1.6;\quad \frac{13}{8} = 1{,}625;\ \frac{21}{13} = 1{,}61538\ldots$$

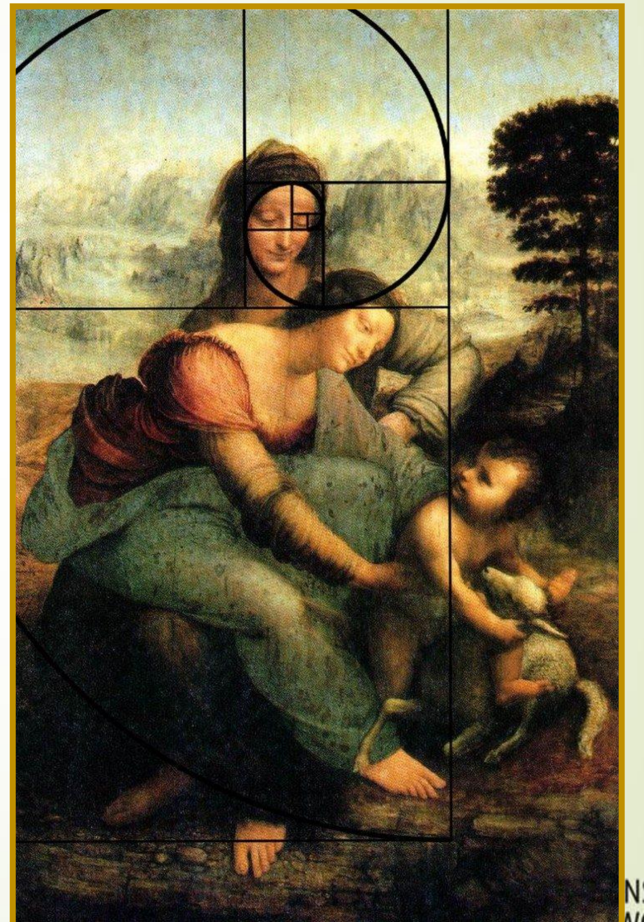
Graficzna interpretacja kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego



MAŁOPOLSKA

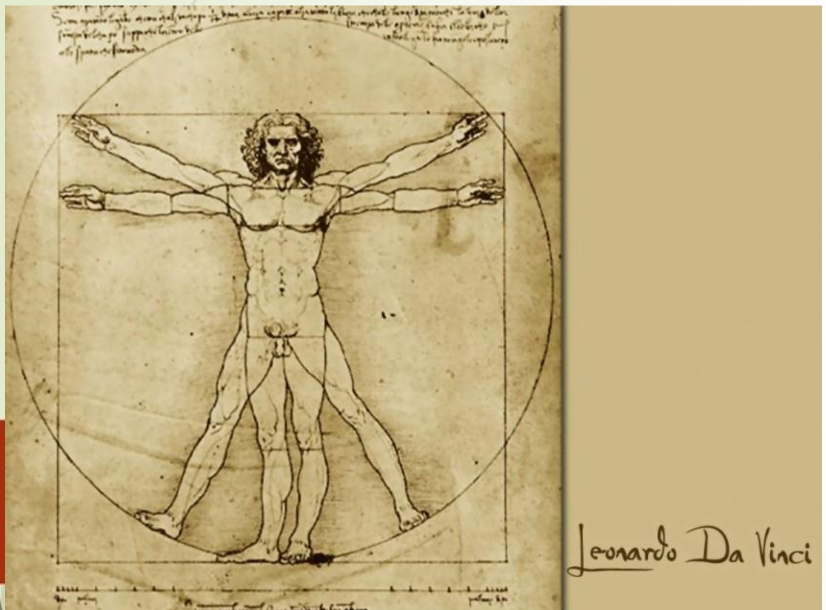
„Złoty podział” w dziełach Leonarda da Vinci

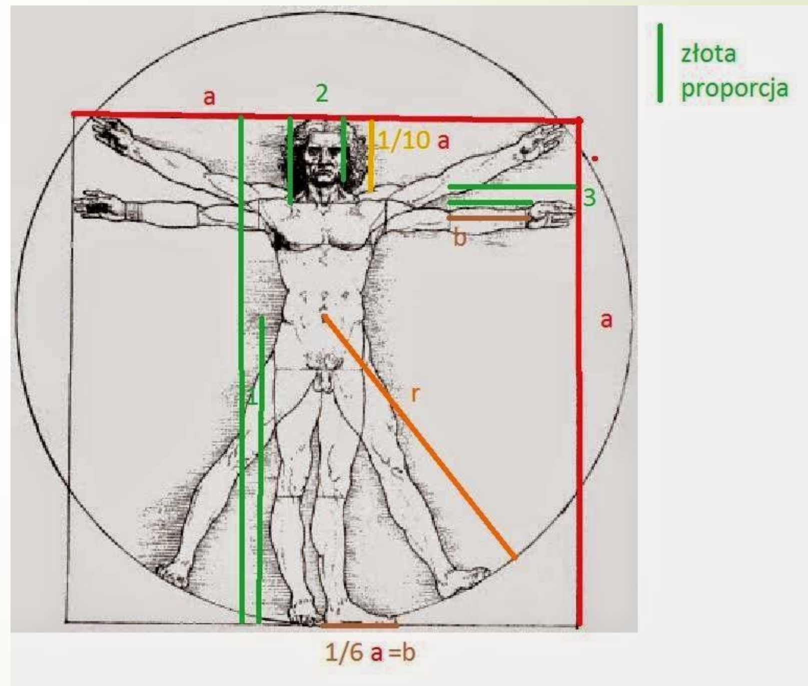




NSTYTUCJA
WOJEWÓDZTWA
MAŁOPOLSKIEGO
www.mcdn.edu.pl

„Człowiek witruwiański” Leonarda da Vinci





INSTYTUCJA WOJEWÓDZTWA MAŁOPOLSKIEGO

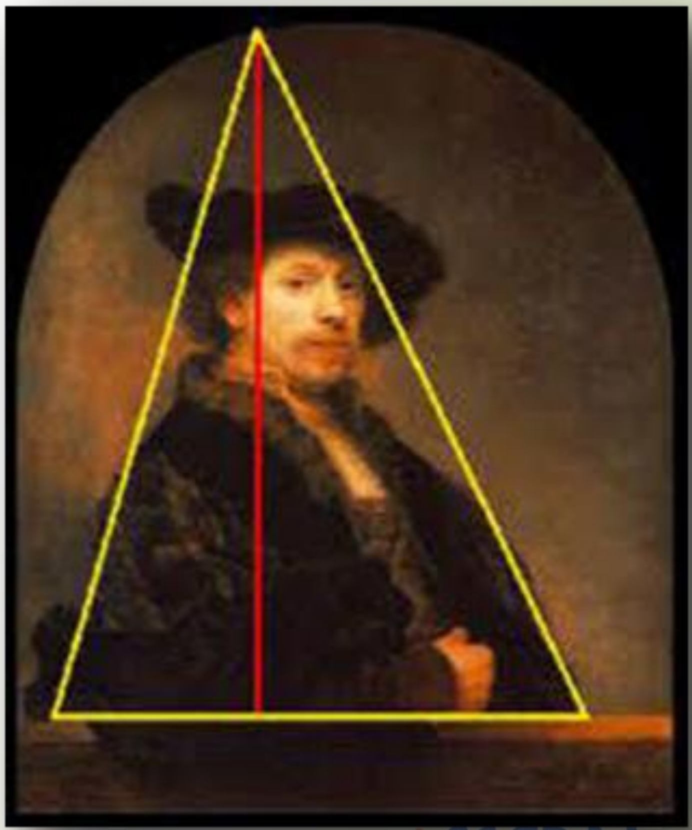
W „złotej proporcji”, inaczej w boskiej proporcji pozostają do siebie:

- wzrost człowieka do odległości od stóp do pępka,
- odległość od pępka do czubka głowy do odległości od ramion do czubka głowy,
- odległość od ramion do czubka głowy do odległości od brody do czubka głowy,
- wysokość twarzy przez jej szerokość

Symboliczny wymiar ma arcydzieło Michała Anioła „Stworzenie Adama”

MAŁOPOLSKA

Wśród wielu arcydzieł, w których wykorzystano „złotą proporcję” nie może zabraknąć tych, które wyszły spod pędzla Rembranta

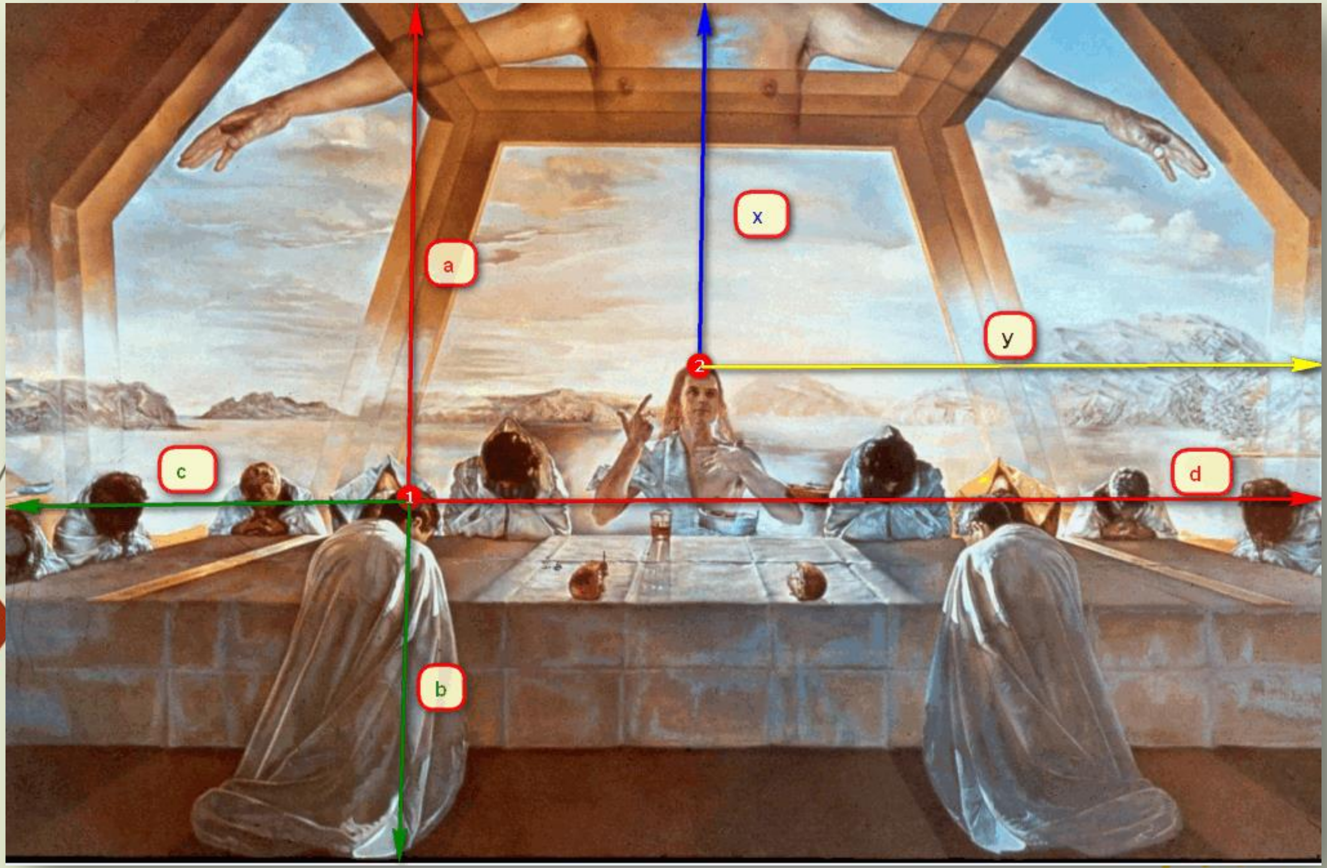


MCDN www.mcdn.edu.pl INSTYTUCJA WOJEWÓDZTWA MAŁOPOLSKIEGO

Salvador Dali „Sakrament ostatniej wieczerzy”

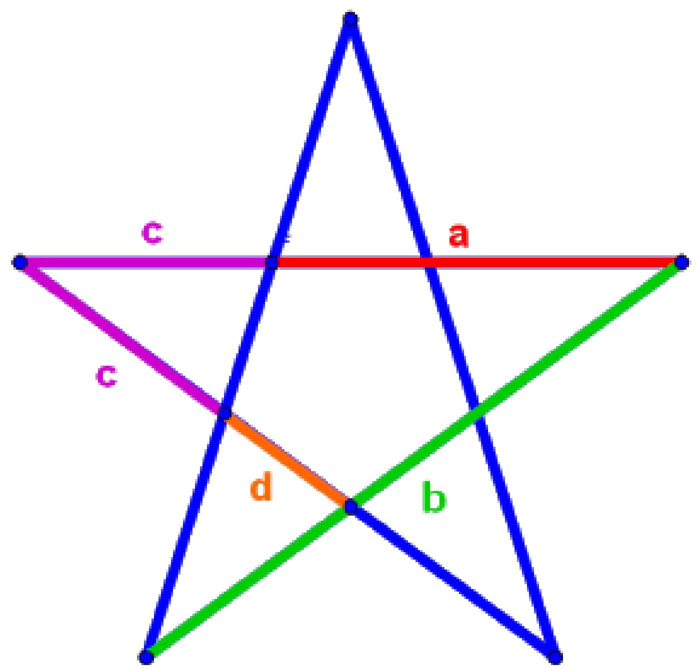
Źródło: https://sites.google.com/site/zlotyxpodzial/our-company/our-staff

Salvador Dali „Sakrament ostatniej wieczerzy”



MAŁOPOLSKA

Symbol pitagorejczyków



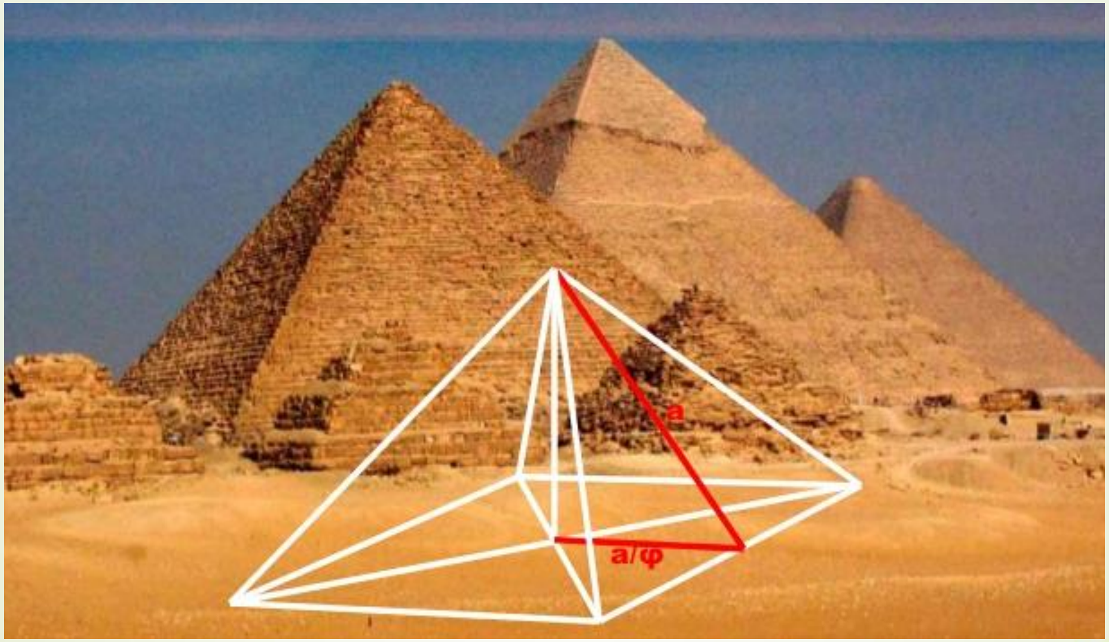
$$\varphi = \frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi = \frac{a}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

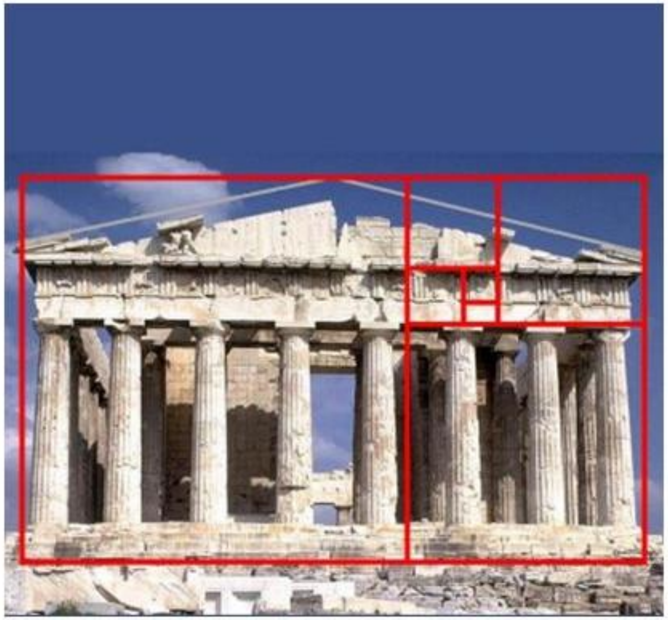
$$\varphi = \frac{c}{d} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

„Złoty podział” w architekturze

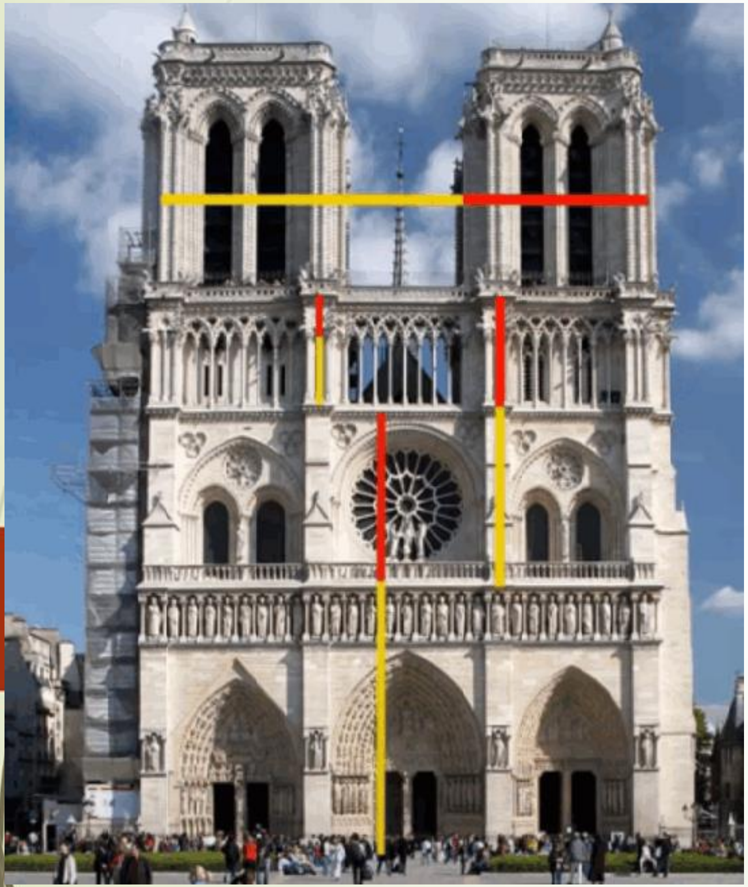
Jeżeli weźmiemy przekrój Wielkiej Piramidy, to otrzymamy trójkąt prostokątny, nazywamy Trójkątem Egipskim. Stosunek przeciwprostokątnej (wysokość ściany bocznej) do krótszej przyprostokątnej (połowa długości podstawy) wynosi 1,61804 i różni się od liczby φ, tylko o jeden na piątym miejscu po przecinku.

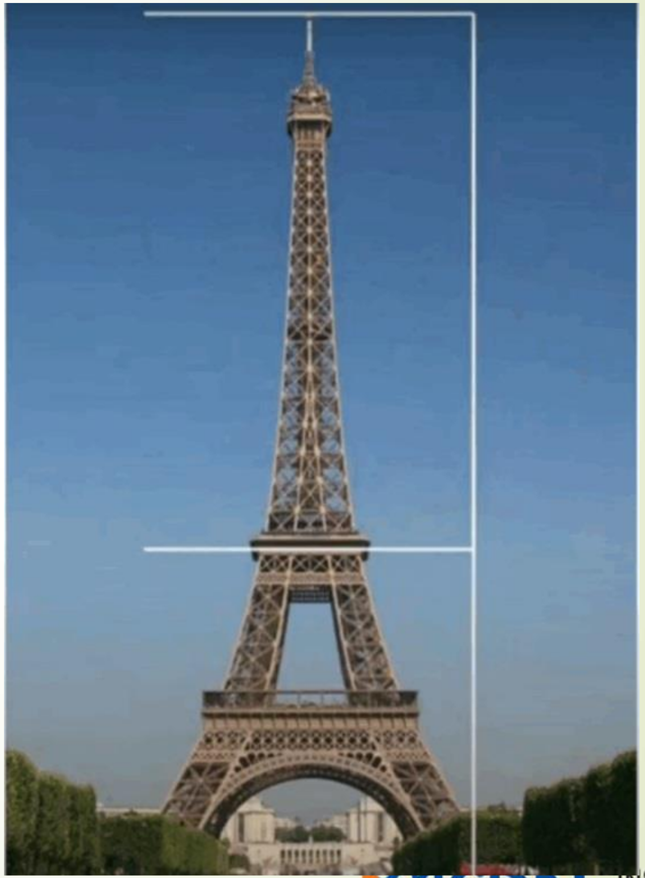


Portal Partenonu można wpisać w „złoty prostokąt”



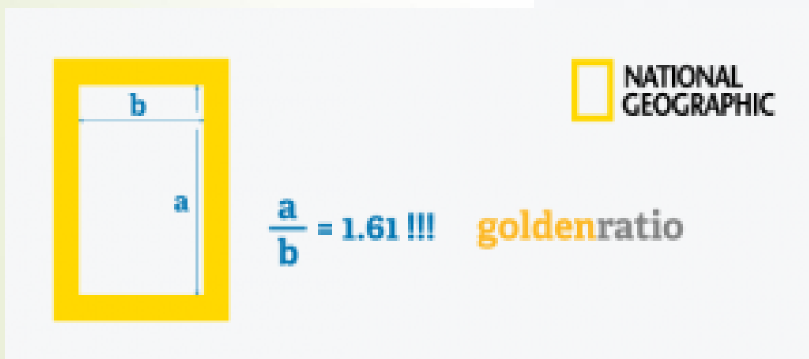
„Złoty podział” w architekturze





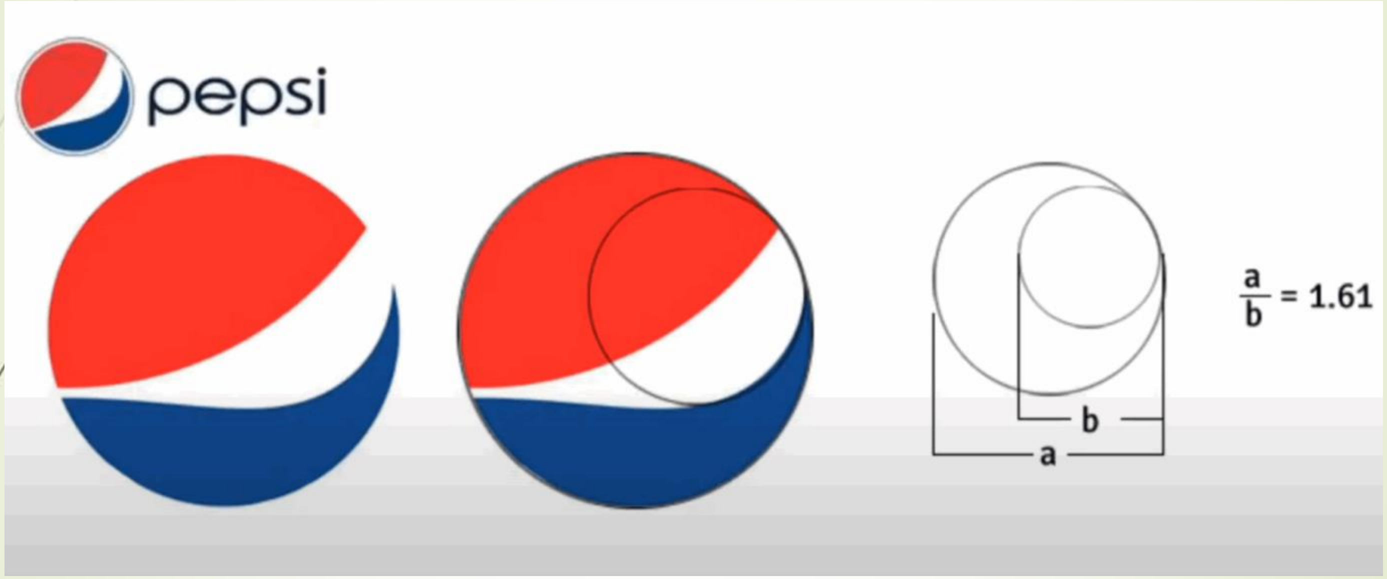
MAŁOPOLSKA

„Złoty podział” współcześnie



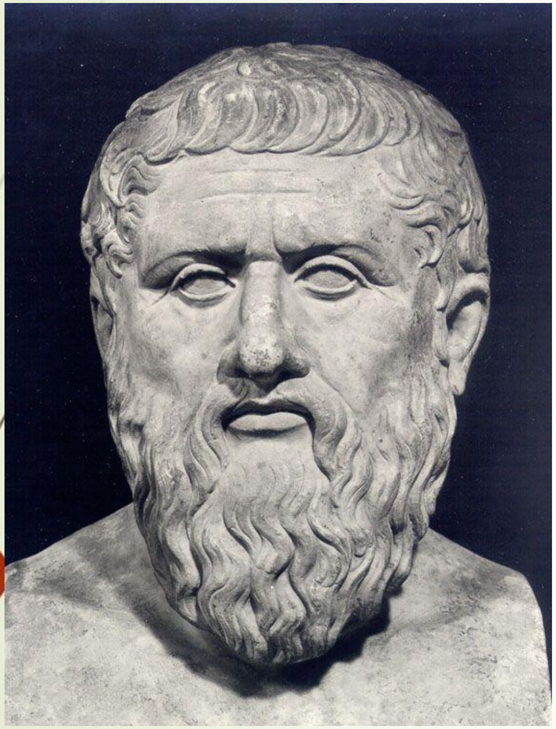
www.mcdn.edu.pl
INSTYTUCJA WOJEWÓDZTWA MAŁOPOLSKIEGO

Logo za milion dolarów



MAŁOPOLSKA

Czy „złota liczba” jest kluczem do zrozumienia przyrody?



INSTYTUCJA WOJEWÓDZTWA MAŁOPOLSKIEGO

www.mcdn.edu.pl

MAŁOPOLSKA

Bibliografia

- https://www.youtube.com/watch?v=lw0tRolFXbs (01.06.2020)
- http://witruwianskagwiazdadruidarzymona.blogspot.com/p/idealne-proporcje.html (30.05.2020)
- https://sites.google.com/site/zlotyxpodzial/our-company/our-staff (30.05.2020)
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:Self-portrait_at_34_by_Rembrandt.jpg (30.05.2020)
- https://sites.google.com/site/zlotyxpodzial/our-company/our-staff (30.05.2020)
- http://witruwianskagwiazdadruidarzymona.blogspot.com/p/idealne-proporcje.html/ (30.05.2020)
- https://thefibonaccisequence.weebly.com/mona-lisa.html (30.05.2020)
- Źródło: „ścieżki matematyki" N. Langdon, Ch. Snape. GWO 1998r.
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Ci%C4%85g_Fibonacciego#/media/Plik:FibonacciBlocks.svg/ (29.05.2020)
- https://www.youtube.com/watch?v=4ylf6TUU-Eo (29.05.2020)
- https://www.youtube.com/watch?v=wb7kPaM8cfg (29.05.2020)

MAŁOPOLSKA

Zakończenie

INSTYTUCJA WOJEWÓDZTWA MAŁOPOLSKIEGO