

Matematyka

CZASOPISMO DLA NAUCZYCIELI

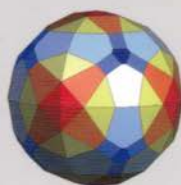
426 | indeks 365149

Przyrządy miernicze – stwórz
niecodzienny temat zajęć

Trójmian kwadratowy i cyrkiel – nowatorski pomysł
na koło matematyczne

Język symboli i znaków – jak wykorzystać na zajęciach znane symbole,
aby właściwie przekazać wiedzę

Wielościany a punkty kratowe



ISSN 0137-8848



9 770137 884002

Art. nr 440816



Symbole pitagorejszczyków

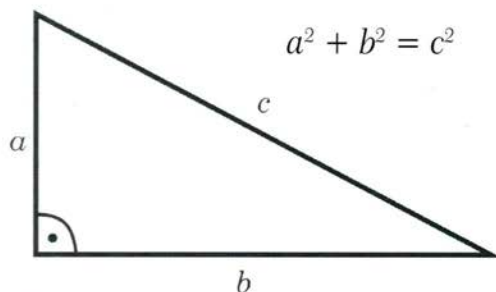
Język symboli popularny był nie tylko w dawnych czasach – również dziś jest często stosowany. Zanim powstało pismo, do przekazywania mowy służyły obrazki i różne symbole, których znacznie wcześniej, oczywiście, uzgodniono.

Tomasz Grębski

Język symboli jest najstarszym znanym językiem. Stosowano go już w epoce neolitu, czyli 6–5 tysięcy lat p.n.e. Mowa o symbolach Vina, zwanych też skryptami Vinca lub skryptami starożytnej Europy. Jest to zestaw symboli z artefaktów kultury Vinca z południowo-wschodniej Europy. Symbole są uznawane za tzw. protojęzyk. Pismo ewoluowało od najstarszego stadium – pikto grafii, poprzez ideografię, pismo analityczne, aż do najmłodszego – pisma fonetycznego. Dlaczego symbole mają takie znaczenie? Symbol to pewien semantyczny środek stylistyczny, który ma jedno znaczenie dosłowne oraz różną liczbę znaczeń ukrytych. Jest postrzegany zmysłowo i wywołuje znacznie więcej emocji niż pojedynczy wyraz. Można powiedzieć, że symbol ma zastąpić jakieś jedno pojęcie innym, bardziej wyrazistym i najlepiej oddającym jego naturę, np. symbol lwa oznacza nie tylko dany gatunek zwierzęcia, ale również siłę i władzę. Język symboli stosowany jest w wielu dziedzinach, m.in. w matematyce, muzyce i sztuce. Język obrazkowy czy symboliczny mamy w systemach operacyjnych naszych komputerów, a obecne smartfony biją rekordy w różnorodności takiego języka. Możemy go również zobaczyć na co dzień, np. wśród oznaczeń w komunikacji metrem.

Po tym krótkim historycznym wstępie chciałbym przyjrzeć się najważniejszym symbolom, jakie stosował jeden z największych filozofów świata – Pitagoras (ur. ok. 572 r. p.n.e. na Samos w Grecji, zm. ok. 497 r. p.n.e. w Metaponcie). Przybliżę teraz w skrócie postać tego filozofa, aby lepiej nam było zrozumieć jego filozofię. Był on jedną z najbardziej tajemniczych postaci w historii całej ludzkości. Większość ludzi kojarzy go jako twórcę jednego z najważniejszych twierdzeń w geometrii, dotyczącego trójkąta prostokątnego (jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych równa jest kwadratowi długości przeciwprostokątnej). Warto wspomnieć, że twierdzenie odwrotne też jest prawdziwe.

Ale geometria nie była, oczywiście, jedyną domeną Pitagorasa. Zajmował się on również matematyką, muzyką, filozofią, a także polityką.



■ Rys. 1. Ilustracja twierdzenia Pitagorasa



Już we wczesnych latach dzieciństwa słuchał wykładów Talesa i Anaksymandra. Ale nie do końca głoszone przez nich tezy dotyczące świata go zadowalały. Poszukiwał znacznie więcej i zaczął podróżować w poszukiwaniu odpowiedzi na swoje pytania. Za namową Talesa wyruszył do Egiptu, gdzie spędził ponad dwadzieścia lat. Tam zgłębiał egipską wiedzę matematyczną, muzyczną i medyczną, a także mistyczne nauki Egipcjan o duszy. Po najeździe wojsk perskich na Egipt Pitagoras trafił do niewoli w Babilonii. Ponieważ dał się poznać władcy Persji jako wykształcony człowiek, król obdarzył go zaufaniem, a dzięki temu Pitagoras mógł dalej zgłębiać sekrety nauki. W czasach Pitagorasa bardzo duże znaczenie miała znajomość wiedzy Egipcjan i Babilończyków. A zatem podróże Pitagorasa do tych krajów podniosły jego prestiż naukowy. W wieku 56 lat powrócił do rodzinnego miasta Samos (Grecja), gdzie zaczął nauczać. Następnie przeniósł się do miasta Kroton na południu Italii. To właśnie tam w 529 p.n.e. założył słynną wspólnotę. Uczono w niej m.in. filozofii, matematyki i nauk przyrodniczych. Nie każdy mógł do niej wstąpić. Decyzję o tym podejmował sam Pitagoras. Na swoich uczniów wybierał osoby zdolne do milczenia, które byłyby w stanie zachowywać w tajemnicy jego nauki. Pitagorejczycy, bo tak nazywano uczniów Pitagorasa, musieli nosić najskromniejsze stroje i zachowywać najwyższą czystość i prostotę w obyczajach. Przez pięć pierwszych lat nauki uczniowie byli tylko słuchaczami i musieli milczeć. Dopiero po kilku latach najwytrwalsi mogli ujrzeć oblicze Pitagorasa, a po znacznych postępach w nauce Pitagoras przekazywał im kolejne tajniki wiedzy. Sposób życia pitagorejczyków był następujący: *Blisko sześciuset ich żyło w jednym wielkim gmachu, z żonami i dziećmi swymi i składali*

jedną rodziną zachowując najdoskonalszą zgodę i porządek. Z rana rozkładano pracę na cały dzień, a w wieczór rozważano jej skutki. Wstawali przed wschodem słońca dla uczczenia go, czytano potem wiersze Homera i innych poetów dla wzniesienia ducha, poczem kilka godzin poświęcano ważnym pracom i zatrudnieniom, dalej następowała godzina rozmowy. Przed samem południem zajmowano się ćwiczeniami gimnastycznymi. Obiad składał się po większej części z chleba z miodem. Jedynym napojem była woda. Resztę dnia poświęcano publicznym i domowym zatrudnieniom, kąpeli i obrządkom religijnym (Poezye Brunona Hrabi Kicińskiego, Warszawa 1841).

Pitagoras zalecał dbałość o równowagę ducha i, jak wynika z relacji Porfiriusza (ur. ok. 232 r., zm. ok. 305 r.), *nikt Go nigdy nie widział śmiejącego się ani płaczącego (Porfiriusz: Żywot Pitagorasa)*, a według filozofa Jamblicha (ur. ok. 250 r., zm. w 326 r.) cechował go *spokój pogodny i nieporównywalny z niczym (Jamblich O życiu pitagorejskim)*.

Najbardziej pewnym źródłem informacji o moralności Pitagorasa są *Złote wiersze*, których najprawdopodobniej autorem jest sam Pitagoras.

Pitagorejczycy posługiwali się często językiem symboli i krótkich stwierdzeń, które dla niewtajemniczonych były zupełnie niezrozumiałe.

Tetraktys – idealny wzór

Najważniejsze myśli Pitagorasa sprowadzają się jednak do matematyki, a dokładniej do liczb. Według niego i jego uczniów, wszystko stworzono za pomocą liczb. To właśnie one były kluczem do zrozumienia świata i to nie tylko materialnego, ale także duchowego. Liczbom i figurom geometrycznym nadawał ezoteryczne i święte znaczenie. Pitagorejczycy zauważali w przyrodzie



głęboką, tajemniczą i wzorzystą strukturę. Tym bardziej więc wierzyli, że w liczbach ukryta jest wielka moc, a cała natura jest w pełni z nimi zgodna. Tę zgodność natury z liczbami Pitagoras zawarł w jednym symbolu, którym jest Tetraktys, zwany też przez pitagorejczyków Świętym Tetraktyssem. Dla nich był symbolem boskości, obrazem tworzonego i wiecznego świata, tego, co było, jest i będzie. Podczas składania przysięgi pitagorejczycy mówili: *Przysięgam na tego, który naszym duszom dał Tetraktys, mający w sobie korzenie i źródło wiecznej natury.*

Tetraktys składa się z dziesięciu punktów rozmieszczonych w czterech rzędach, tworzących trójkąt równoboczny: na dole cztery, wyżej trzy, nad nimi dwa i na samej górze jeden punkt.

Liczba 10 uznawana była w czasach Pitagorasa za liczbę doskonałą, zaś liczby 1, 2, 3 i 4 to tzw. wielka czwórka liczb. Łatwo zauważyć, że $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

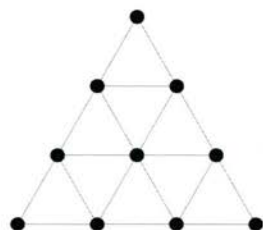
Dlaczego ten symbol był najważniejszy dla pitagorejczyków? Co chcieli za jego pomocą wyrazić?

Oto kilka interpretacji symbolicznego charakteru Tetraktysu:

1. Tetraktys symbolizuje harmonię sfer i kosmosu:
 - jeden punkt to jedność (Monada) – źródło, czyli początek wszystkiego, coś doskonałego, boskość,
 - dwa punkty to podział, czyli Diada – liczbę tę przypisywano materii,
 - trzy punkty to Triada, czyli harmonia, która łączy Monadę i Diadę, czyli boskość z materią,
 - cztery punkty to Tetrada – czyli kosmos.
2. Tetraktys symbolizuje cztery żywioły: ogień, powietrze, wodę i ziemię.
3. Bardziej matematyczna interpretacja Tetraktysu:



Rys. 1. Pitagoras z Samos



Rys. 2. Tetraktys

- jeden punkt to wymiar zerowy,
 - dwa punkty to jeden wymiar (przez dwa punkty przechodzi dokładnie jedna linia prosta),
 - trzy punkty to dwa wymiary, czyli płaszczyzna (przez każde trzy niewspółliniowe punkty można poprowadzić dokładnie jedną płaszczyznę),
 - cztery punkty to, oczywiście, przestrzeń, czyli trzy wymiary.
4. Przy pomocy wielkiej czwórki (1, 2, 3, 4) Pitagoras wyraził interwały w muzyce. Zauważył, że *harmonia wyraża się przez stosunek dwóch liczb naturalnych i tym jest pełniejsza, im liczby te są mniejsze*. Pitagorejczycy zauważyli, że jeżeli długości dwóch napiętych jednakową siłą strun mają się jak 2 : 1, to struny te dają przyjemne współbrzmienie. Podobnie 3 : 2, 4 : 3 – te zależności są liczbowym opisem konkretnych interwałów muzycznych: oktawy, kwinty czystej i kwarty czystej. Odkrycie pitagorejczyków doprowadziło do stworzenia skali muzycznej, która jest bardzo zbliżona do skali równomiernie temperowanej, używanej obecnie w muzyce.

Tetraktys czy liczby 1, 2, 3, 4 można zauważyć w kolejnych latach w sztuce i nie tylko. Poszukiwano i w dalszym ciągu szuka się tego symbolu w różnych dziedzinach życia.



Przykład 1. Tetraktys w malarstwie

Wielu badaczy dzieł Leonarda da Vinci twierdzi, że artysta świadomie zastosował wielką czwórkę liczb z Tetraktysu w swym słynnym obrazie *Ostatnia Wieczerza*, znajdującym się w kościele Santa Maria delle Grazie w Mediolanie. Czy rzeczywiście Leonardo zastosował to świadomie? Nie wiemy, ale poniżej przedstawiam kilka przykładów, jak zobaczyć te liczby w obrazie Leonarda.

Liczba 4 (możemy ją zauważyć w kilku miejscach):

- na ścianach bocznych widzimy po cztery tkaniny,
- cztery grupy uczniów po trzech w każdej,
- cztery nogi stołu,
- kasetony na suficie to czworoboki,
- czworobok (romb) wyznaczony przez głowę, ręce i nogi Chrystusa.

Liczba 3 (też możemy ją zauważyć w kilku miejscach):

- po trzech uczniów w każdej grupie,
- trzy okna,
- trzy ściany.

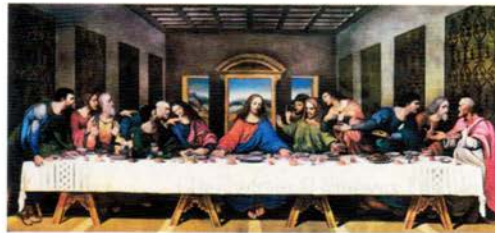
Liczba 2 (możemy ją zauważyć w kilku miejscach):

- dwie grupy uczniów,
- dwie ściany z czterema tkaninami.

Liczba 1 – to, oczywiście, postać Chrystusa.

Przykład 2. Tetraktys w fizyce

Przyjrzyjmy się budowie atomu: jądro to liczba jeden; proton i neutron to liczba dwa; każdy neutron i proton składa się z trzech kwarków – mamy więc liczbę trzy; liczbę cztery tworzą cztery obecnie znane oddziaływania: grawitacyjne, elektromagnetyczne, oddziaływanie słabe i oddziaływanie silne.



■ Rys. 3

Przykład 3. Tetraktys w chemii

Spójrzmy na układ okresowy pierwiastków, którego twórcą był rosyjski aptekarz Dimitri Mendelejew (1834–1907). W 1869 r. sklasyfikował on wszystkie znane pierwiastki zgodnie z ich masą atomową i właściwościami chemicznymi.

Jeśli weźmiemy pod uwagę rozmieszczenie elektronów na powłokach, to otrzymamy:

- I powłoka K – ma maksymalną liczbę 2 elektronów,
- II powłoka L – ma maksymalną liczbę 8 elektronów,
- III powłoka M – ma maksymalną liczbę 18 elektronów,
- IV powłoka N – ma maksymalną liczbę 32 elektronów.

Powyższe maksymalne liczby elektronów są osiągnięte. Na kolejnych powłokach mamy:

- V powłoka – ma maksymalną liczbę 50 elektronów,
- VI powłoka – ma maksymalną liczbę 72 elektronów.

Jednak na tych powłokach maksymalne liczby elektronów nie zostały osiągnięte.

Przyjrzyjmy się zatem czterem pierwszym powłokom i „zabawmy się” liczbami.

- $2 = 2 \cdot 1^2$
- $8 = 2 \cdot 2^2$
- $18 = 2 \cdot 3^2$
- $32 = 2 \cdot 4^2$



Łatwo zauważyć, że liczby w kwadratach to liczby z Tetraktysu.

Na układ okresowy możemy też spojrzeć pod kątem okresów:

- okres I zawiera 2 pierwiastki,
- okresy II i III zawierają po 8 pierwiastków,
- okresy IV i V zawierają po 18 pierwiastków,
- okres VI zawiera 32 pierwiastki,
- okres VII jest niedokończony.

Zatem mamy liczby 2, 8, 18 i 32, które możemy analogicznie, tak jak wcześniej, rozpisać i zobaczyć wielką czwórkę liczb.

Przykład 4. Tetraktys w biologii

Białka – podstawowe składowe białek to węgiel, azot, tlen i wodór. Pierwiastki te mają odpowiednio 4, 3, 2 i 1 wiązanie łańcuchowe.

DNA – tu też możemy odnaleźć liczby Tetraktysu. DNA zbudowany jest z nukleotydów, w skład każdego z nich wchodzi trzy składniki (liczba 3):

- zasada azotowa,
- cukier pięciowęglowy,
- reszta kwasu fosforowego.

Zasady azotowe: adenina, guanina, tymina i cytozyna (liczba 4).

Chromosom zawiera podwójną nić (liczba 2), zaś całość możemy uznać za jeden (liczba 1).

Układ krwionośny – serce (liczba 1), serce ma dwie żyły główne (liczba 2), trzy aorty (liczba 3) oraz cztery żyły płucne (liczba 4).

Oczywiście, są to tylko przykłady różnych interpretacji i dopasowania liczb z Tetraktysu do różnych zagadnień.

Pentagram – gwiazda pitagorejska

Pentagram to figura geometryczna, którą otrzymujemy, przedłużając boki pięciokąta foremnego. Znany jest też jako gwiazda

pitagorejska. Należy do wielokątów gwiaździstych foremnych.

Zanim przeanalizujemy szczegółowo właściwości tej figury, podkreślmy, że pentagram pitagorejski to tzw. pentagram „biały” i nie należy go mylić z pentagramem odwróconym, który stał się symbolem pewnych subkultur.

Symbolika pentagramu jest bardzo szeroka. Od wieków wiele kultur uważa, że pentagram kryje wiele tajemnic, między innymi tajemnicę budowy wszechświata. Najstarsze znane przedstawienie pentagramu pochodzi z Ur – centrum cywilizacji Mezopotamii (3500 r. p.n.e.). Dla Babilończyków był m.in. symbolem zdrowia, często rysowali go na pojemnikach z żywnością. Dla ochrony przed złymi duchami używał go biblijny król Salomon, pieczętował się nim także cesarz Konstantyn Wielki (III–IV w.). Dla pierwszych chrześcijan pentagram odzwierciedlał pięć ran Jezusa ze względu na pięć wierzchołków. Może również odzwierciedlać pięć żywiołów (ziemię, wodę, wiatr, ogień i światło) oraz pięć światów (fizyczny, eteryczny, astralny, mentalny i duchowy), ukazując wyższość umysłu człowieka nad wszelkimi innymi żywiołami i zmysłami.

To tylko kilka przykładów symbolicznego znaczenia pentagramu. Przedstawię teraz pentagram pod kątem zawartych w nim matematycznych zależności. Być może te własności spowodowały przyjęcie pentagramu za symbol pitagorejczyków, który był dla nich ich znakiem rozpoznawczym. Rysując pentagram, często umieszczali przy każdym wierzchołku litery słowa „zdrowie” – po grecku „hygea”.

Dlaczego pitagorejczycy tak bardzo uwielbiali tę figurę? Z pomocą przychodzi matematyka. Figura ta jest bardzo ciekawa i posiada właściwości odróżniające ją od innych figur. Przede wszystkim mamy tu do czynienia



z tzw. złotymi proporcjami czy złotym podziałem odcinka. Złoty podział polega na takim podziale odcinka na dwie nierówne części, aby stosunek długości całego odcinka do części dłuższej był równy stosunkowi długości części dłuższej do długości części krótszej.

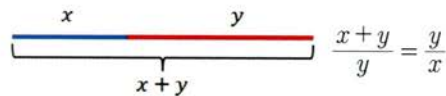
Stosunek ten to tzw. złota liczba:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618\dots$$

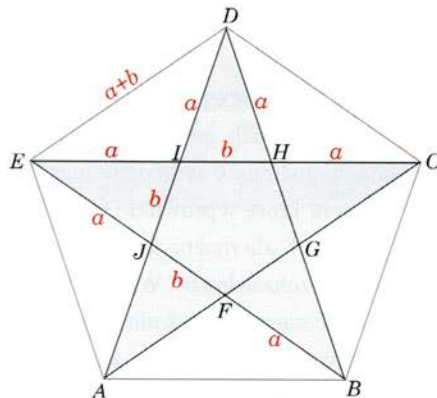
Złota proporcja uważana jest za wyraz matematycznej doskonałości. Zatem wszystko, co zachowuje ten stosunek, jest doskonałe i idealnie piękne. Dlatego złoty podział miał wielkie znaczenie szczególnie w architekturze starożytnej, ale nie tylko. Doskonałymi przykładami zastosowań złotej proporcji są Partenon, Wielka Piramida w Gizie, a także dzieła Leonarda da Vinci, Michała Anioła i Mozarta. Złote proporcje możemy zauważyć zarówno w naturze (w muszlach, liściach i łodygach), jak i w ludzkiej sylwetce (stosunek wysokości człowieka do wysokości do pępka, stosunek długości ręki do długości przedramienia; proporcje te są również w naszym DNA). Takich przykładów jest naprawdę bardzo wiele.

Pentagram jest figurą, która w niezwykle sposób obrazuje złoty podział, zatem nic dziwnego, że stał się on symbolem pitagorejczyków. Mamy tu dodatkowo podobieństwo trójkątów – i to tzw. złotych trójkątów – ich boki są w złotych proporcjach. Każdy kąt pentagramu ma miarę 36° , a ich suma równa się dwóm kątom prostym, czyli 180° . Liczba pięć (pentada) dla pitagorejczyków stanowiła liczbę harmonii zdrowia i urody. Łączyła też w sobie dwie liczby z Tetraktysu: Diadę i Triadę.

Pentagram jest bardzo popularny we współczesnym świecie, a jego symboliczne znaczenie wprowadziło go na wiele państwowych flag



■ Rys. 4. Złoty podział odcinka



$$\frac{DE}{EB} = \frac{DH}{DE} = \frac{IH}{HD}, \text{ czyli } \frac{a+b}{2a+b} = \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

■ Rys. 5. Pentagram i złote proporcje w nim zawarte

czy sztandarów. Możemy go zobaczyć w formie gwiazdy, m.in. na flagach Stanów Zjednoczonych, Turcji i Unii Europejskiej; symbolizuje również gwiazdy Hollywood w Alei Sław w Los Angeles.

Z pentagramem związany jest również najbardziej znany rysunek Leonarda da Vinci (zwany też Anatomią człowieka) – *Człowiek witruiwiański*. Powstał około 1490 r. jako ilustracja do traktatu Witruwiusza *O architekturze ksiąg dziesięciuro*, poświęconego proporcjom ludzkiego ciała. Figura narysowana na planie pentagramu sprawiła, że stał się on w okresie Odrodzenia symbolem człowieka. Cztery dolne ramiona to ręce i nogi, a górne ramię to głowa. Mogą one również symbolizować pięciopalczną dłoń, pięć ludzkich zmysłów (wzrok, słuch, smak, powonienie i dotyk) oraz pięć otaczających nas światów (fizyczny, ezoteryczny, astralny, mentalny i duchowy).



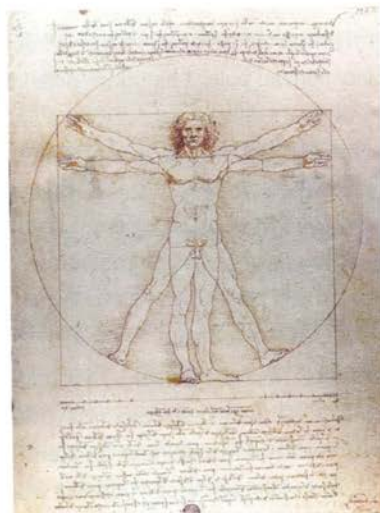
Pentagram możemy otrzymać również poprzez połączenie wierzchołków pięciokąta foremnego, czyli rysując pięć jego przekątnych. Najslawniejszym współczesnym pięciokątem foremnym jest zapewne Pentagon w USA.

Maksymy pitagorejskie

Mówiąc o symbolach, jakich używali pitagorejczycy, warto wspomnieć o ich sentencjach słownych – maksymach, które wprawdzie nie są symbolami graficznymi, ale można je potraktować jako symboliczny przekaz słowny. Wiele z nich znamy i słyszymy dość często, jednak nie do końca wiemy, że to przekazy słowne Pitagorasa i jego szkoły. Sentencje te są czymś w rodzaju krótkich, ale bardzo konkretnych instrukcji na życie.

Oto kilka przykładów sentencji, które można uznać za pitagorejskie. Niektóre z nich można odnaleźć w *Żywotach Pitagorasa* Porfiriusza, zaś inne w dziele Diogenesa *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*:

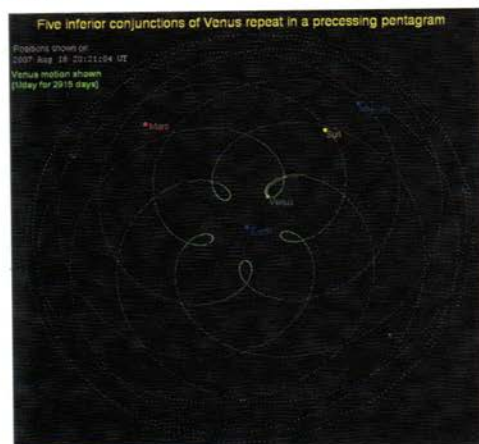
- Każde twierdzenie filozofa daje się obalić z taką samą łatwością, z jaką można go dowieść, nie wykluczając powyższego twierdzenia.
- Kto mówi, sieje, kto słucha, zbiera.
- Wszystko jest liczbą.
- Muzyka budzi w sercu pragnienie dobrych czynów.
- Najkrótsze odpowiedzi „tak” i „nie” wymagają najdłuższego zastanowienia.
- Nic w nadmiarze.
- Trudno jest iść przez życie wieloma drogami jednocześnie.
- Trzeba milczeć albo mówić rzeczy lepsze od milczenia.
- Zły język zdradza złe serce.
- Nie gasić ognia mieczem.
- Własnego serca nie zjadać.
- Podobizną boga nie zdobić palca.



Ryc. 6



Ryc. 7



Ryc. 8. Kolejne koniunkcje Wenus ze Słońcem następują w przybliżeniu 13 razy na 8 lat ziemskich (ruch Wenus i Ziemi jest bliski rezonansu 13:8); z tego powodu wykres jej położenia na niebie ma pięciokątną symetrię (źródło: Wikipedia), czyli przypomina pentagram.



■ Ryc. 9. Szkoła pitagorejska. Na pierwszym planie Theano, żona Pitagorasa



■ Ryc. 10



■ Ryc. 11. Rzeźba Luca della Robbia przedstawiająca Euklidesa i Pitagorasa



■ Ryc. 12



■ Ryc. 13

Przedstawiłem dwa graficzne, a zarazem matematyczne symbole Pitagorasa, które możemy bez problemu odnaleźć w życiu codziennym. Dołączając do tego sentencje pitagorejskie, mamy też trochę nauk humanistycznych. Przecież Pitagoras to przede wszystkim jeden z największych filozofów świata, który łączył w swych przekazach wiele dziedzin nauki.

Myślę, że warto czasem zatrzymać się na jakimś znaku czy symbolu i poznać jego historię oraz znaczenie. W wielu symbolach, a w szczególności w figurach geometrycznych, możemy zobaczyć różne ciekawe własności matematyczne. Liczbami możemy bawić się w nieskończoność. Można na nich przeprowadzić takie działania, że zobaczymy w końcu te liczby, które chcemy zobaczyć, ale bardzo ważne jest, aby utrzymać matematyczny rygor i racjonalizm, bo jeśli tego nie zrobimy, to z matematyka staniemy się numerologiem.

Bibliografia

1. <https://en.wikipedia.org>.
2. Corbalan F., *Złota proporcja*, RBA 2010.
3. Chicot M., *Zabójstwo Pitagorasa*, MUZA, Warszawa 2015.
4. Jeleński S., *Śladami Pitagorasa*, PZWS, Warszawa 1961.

Tomasz Grębski

Nauczyciel matematyki w Zespole Szkół Nr 2 im. M. Reja w Kraśniku, autor portalu: www.tomaszgrebski.pl