Usłyszeć geometrię i zobaczyć dźwięki

Czytamy ten tytuł, zastanawiając się, czy nie ma w nim błędu, a zaraz zapewne powiemy: „Chyba powinno być na odwrót"! Otóż nie, wszystko jest w jak najlepszym porządku. Od wielu już lat badam związki między matematyką i muzyką i zaprezentuję Wam, jak można właśnie usłyszeć geometrię i zobaczyć dźwięki.

Tomasz Grębski

Zacznijmy od początku. Dawno temu, w 6 wieku p.n.e. na greckiej wyspie Samos żył sławny matematyk – Pitagoras. Przewodził on szkole myślenia łączącej filozofię, matematykę, muzykę i oczywiście geometrię. Ich hasło przewodnie brzmiało Wszystko jest liczbą. Pitagorejczycy (tak nazywano uczniów Pitagorasa) jako pierwsi odkryli matematyczną harmonię w muzyce i wiedzieli również, że człowiek odbiera jako harmonijne zestawienie takich dźwięków, których częstotliwości pozostają ze sobą w stosunku będącym ilorazem

Rys. 1. Pitagoras

Tabela. 1

Interwał	pryma	sekunda	tercja	kwarta	kwinta	seksta	septyma	oktawa
Stosunek częstotliwości	1:1	9:8	5:4	4:3	3:2	5:3	15:8	2:1
Przykładowa wysokość dźwięku	C	D	E	F	G	A	H	C1

niewielkich liczb naturalnych. Odkryli tzw. wielką czwórkę liczb – **1, 2, 3, 4**. Zauważyli, że jeżeli długości dwóch napiętych jednakową siłą strun mają się jak 2:1, to struny te dają przyjemne współbrzmienie. Podobnie 3:2, 4:3 – te zależności są liczbowym opisem konkretnych interwałów muzycznych: oktawy, kwinty czystej i kwarty czystej. Ich obserwacje można streścić w stwierdzeniu, że „harmonia wyraża się przez stosunek dwóch liczb naturalnych i tym jest pełniejsza, im liczby te są mniejsze".

Odkrycie Pitagorejczyków doprowadziło do stworzenia skali muzycznej, która jest bardzo zbliżona do skali równomiernie temperowanej, używanej obecnie w muzyce.

Pitagoras był dumny z tego, że wszystkie nuty (dźwięki) odkrył przy użyciu matematyki i nadał im wartości liczbowe, stosownie do ich miejsca w pewnego rodzaju wzorcowej tabeli 1.

Używając kwint od nuty nr 1, był on ostatecznie kierowany do nuty 27 i aby znaleźć tę samą nutę w kolejnych oktawach, po prostu podwajał ją do 54, 108, 216, 432 itd.

I tu pojawia się liczba 432. Jest to liczba dość ważna w tzw. stroju pitagorejskim, ale i nie tylko. Czy sam Pitagoras traktował ją wyjątkowo, tego nie wiemy, ale ta liczba jest naprawdę bardzo ciekawa. Wiele starożytnych instrumentów muzycznych – od tybetańskich mis[1] po flety amerykańskich Indian – wydaje ten sam ton, który wibruje z częstotliwością 432 Hz. Przez dziesięciolecia większość instrumentów także była strojona do częstotliwości 432 Hz. Nasuwa się pytanie: kto wybrał tę szczególny dźwięk jako podstawę do strojenia instrumentów i dlaczego? Aby to wyjaśnić, powróćmy do jednej z pasji Pitagorasa – geometrii. Wiemy, że dla Pitagorasa i jego uczniów geometria i matematyka była kluczem do natury wszelkiego życia. I kto wie, może nim jest?

Na początek rozważmy podstawowe geometryczne kształty jakimi są: trójkąt, kwadrat i pięciokąt. Każdemu z tych wielokątów przyporządkujmy sumę kątów wewnętrznych. W ten sposób otrzymujemy liczby, które będą odpowiadać konkretnym kształtom. Suma kątów wewnętrznych trójkąta to 180 stopni, kwadratu – 360 stopni, a pięciokąta 540 stopni. Sumę tę możemy obliczyć również z popularnego wzoru matematycznego: $S=(n-2)\cdot 180^\circ$, gdzie n oznacza liczbę boków wielokąta. Przykładowe sumy pokazuje tabela 2.

Tabela. 2

Wielokąt	Suma kątów wewnętrznych
Trójkąt	180°
Kwadrat	360°
Pięciokąt	540°
Sześciokąt	720°
Siedmiokąt	900°
Ośmiokąt	1080°

[1] Misy dźwiękowe wywodzą się z Indii, skąd w VIII w. n.e. przybyły do Tybetu razem z buddyzmem. Używane były w szamańskich rytuałach religijnych, a także w medytacjach buddyjskich. Służyły nie tylko do gry, ale często także jako przedmiot użytku domowego. Na misach dźwiękowych gra się zasadniczo na dwa sposoby: uderzając w misę pałeczką – uzyskując w ten sposób perkusyjny, pulsujący ton lub pocierając brzeg misy drewnianą różdżką – uzyskując dźwięk długotrwały.

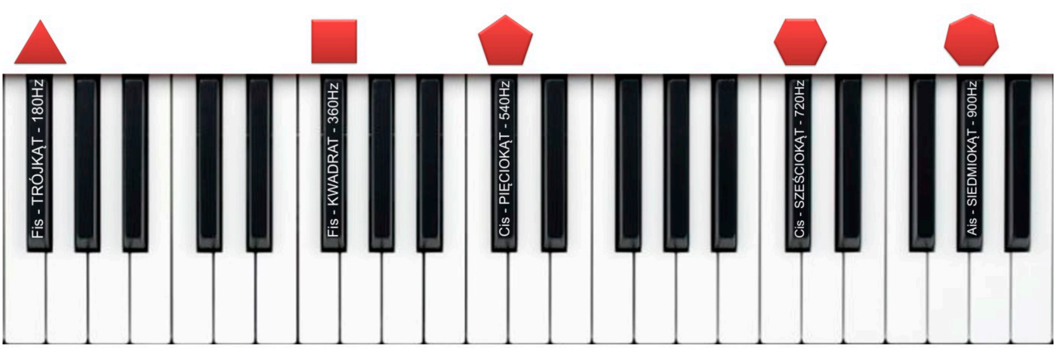
Przenieśmy te liczby na cykle drgań na sekundę, czyli częstotliwości mierzone w Hz. Pozwoli to nam usłyszeć te liczby. A zatem:

$$\begin{aligned} 180^\circ &\equiv 180\ Hz \\ 360^\circ &\equiv 360\ Hz \\ 540^\circ &\equiv 540\ Hz \\ 720^\circ &\equiv 720\ Hz \\ 900^\circ &\equiv 900\ Hz \\ 1080^\circ &\equiv 1080\ Hz \qquad \text{itd.} \end{aligned}$$

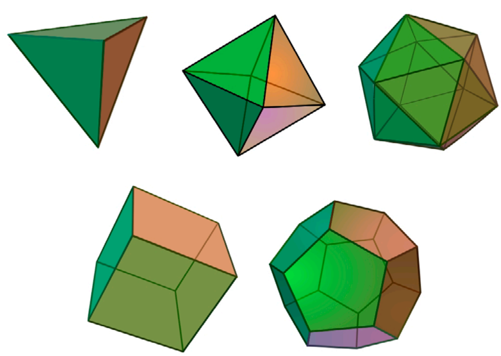
Jeśli teraz przeniesiemy się do muzyki, pamiętając, że jesteśmy w stroju A = 432 Hz i użyjemy nazw nut, to okazuje się, ze 180 Hz to dźwięk Fis, 360 Hz to również dźwięk Fis, ale oktawę wyżej. Dźwięk 540 Hz to harmoniczna kwinta do poprzednich dźwięków. 720 Hz to kolejne Cis, zaś 900 Hz to dźwięk Ais, który jest wymagany do akordu durowego Fis. 1080 Hz to kolejne Cis.

A zatem zobaczmy dźwięki akordu Fis-dur w dwuwymiarowej geometrii:

A na klawiaturze fortepianowej wygląda to tak:



Ciekawe, prawda? Pójdźmy dalej i przenieśmy się teraz w geometrię przestrzenną. Zobaczmy czy i tam uda nam się znaleźć podobne zależności. Warto w tym momencie wspomnieć o sławnym filozofie i matematyku jakim był Platon. Platon – z powodów estetycznych – wprowadził do geometrii (tak dawniej zwano matematykę), ścisły kanon metodologiczny. Według niego dozwolone konstrukcje geometryczne mogły być prowadzone tylko przy użyciu cyrkla i linijki. Do dziś taki rodzaj konstrukcji nosi nazwę konstrukcji platońskich. Prawdziwą obsesją Platona stało się odnalezienie najprostszych trójwymiarowych geometrycznych kształtów. Jego poszukiwania zakończyły się tym, co obecnie nazywamy bryłami platońskimi.



Rys. 1. Bryły Platońskie (źródło: wikipedia)

Te formy stanowią najbardziej podstawowe bloki konstrukcyjne. Można je znaleźć zarówno w wytworach ludzkich, jak i naturalnych formach.

Zobaczmy teraz czy i jak wpasowują się one w geometryczne dźwięki omówione wcześniej.

Na początek rozważmy czworościan. Jego wszystkie ściany to trójkąty. Jeśli dodamy wszystkie kąty wewnętrzne każdej ściany, to otrzymamy:

$$4 \times 180^\circ = 720^\circ \equiv 720\ Hz$$

A zatem widzimy, że jest to omówiony wcześniej dźwięk Fis.

Rozważmy teraz sześcian, jego ściany to oczywiście kwadraty. Jeśli dodamy wszystkie kąty wewnętrzne każdej ściany to otrzymamy:

$$6 \times 360^\circ = 720^\circ \equiv 2160\ Hz$$

$3600\ Hz$ to przecież wysokie Cis.

Następna ciekawa figura to ośmiościan zbudowany z ośmiu trójkątów. Jeśli dodamy wszystkie kąty wewnętrzne każdej ściany to otrzymamy:

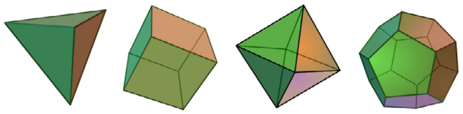
$$8 \times 180^\circ = 1140^\circ \equiv 1440\ Hz$$

Tu mamy kolejny wyższy dźwięk Fis na skali muzycznej.

Rozważmy teraz dwudziestościan, który zbudowany jest z 20 trójkątów, a więc suma jego wszystkich kątów ścian wynosi:

$$20 \times 180^\circ = 3600^\circ \equiv 3600\ Hz$$

$3600\ Hz$ jako dźwięk w muzyce to Ais, który jest uzupełnieniem do pełnego akordu durowego Fis, który możemy zilustrować następująco:



A zatem widzimy, że dwu- i trójwymiarową geometrię można wyrazić za pomocą dźwięków (nut) znajdujących się w akordzie durowym Fis. Możemy to zestawienie zobaczyć w tabeli 3 i 4.

Zwróćcie uwagę również na fakt, który pokazuje tabela, że suma cyfr każdej sumy kątów wewnętrznych jest równa 9. Ale o tym trochę później.

Rozważyliśmy wielokąty, a przecież doskonałą figurą geometryczną jest niewątpliwie

Tabela. 3

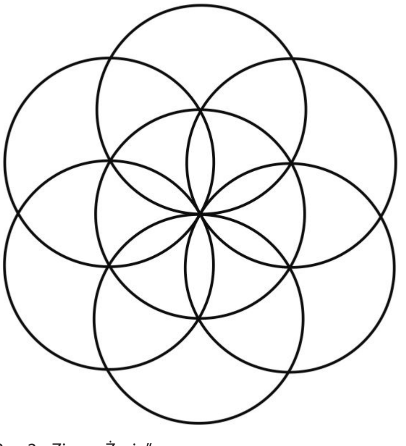
Geometria dwuwymiarowa				
Wielokąt	Suma kątów wewnętrznych	Częstotliwość	Nazwa dźwięku	Suma cyfr w sumie kątów
Trójkąt	180°	180 *Hz*	Fis	1 + 8 + 0 = 9
Kwadrat	360°	360 *Hz*	Fis	3 + 6 + 0 = 9
Pięciokąt	540°	540 *Hz*	Cis	5 + 4 + 0 = 9
Sześciokąt	720°	720 *Hz*	Cis	7 + 2 + 0 = 9
Siedmiokąt	900°	900 *Hz*	Ais	9 + 0 + 0 = 9
Ośmiokąt	1080°	1080 *Hz*	Cis	1 + 0 + 8 + 0 = 9

Tabela. 4

Geometria trójwymiarowa				
Wielokąt	Suma kątów wewnętrznych ścian bocznych	Częstotliwość	Nazwa dźwięku	Suma cyfr w sumie kątów
Czworościan	720°	720 *Hz*	Fis	7 + 2 + 0 = 9
Sześcian	2160°	2160 *Hz*	Cis	2 + 1 + 6 + 0 = 9
Ośmiościan	1440°	1440 *Hz*	Fis	1 + 4 + 4 + 0 = 9
Dwudziestościan	3600°	3600 *Hz*	Ais	3 + 6 + 0 + 0 = 9

koło. Zobaczmy teraz czy podobne związki geometrii i dźwięków sprawdzą się w przypadku koła czy kół. Być może znane są Wam takie nazwy jak Święta Geometria[2], Ziarno Życia, czy Kwiat Życia. Jeśli nie, to na pewno widzieliście rysunki, które za chwilę przedstawię.

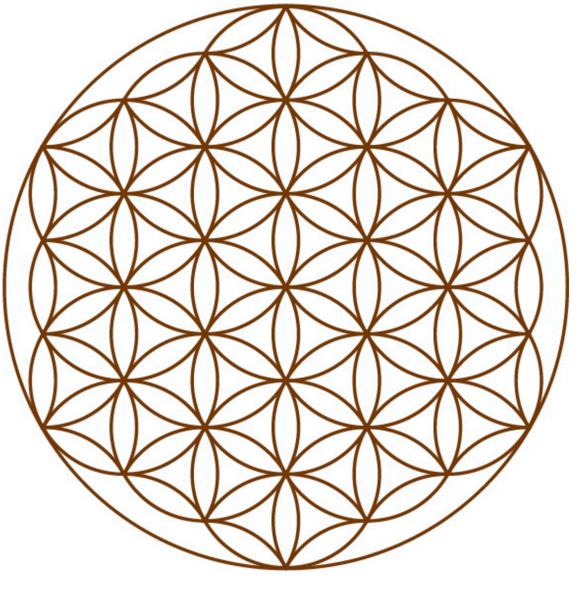
Na początek musimy stworzyć wzór zwany „Zarodkiem Życia", który w trakcie powtarzania przechodzi w „Ziarno Życia", a następnie „Kwiat Życia" znajdowany w wielu świątyniach na całym świecie.



Rys. 2. „Ziarno Życia"

Zacznijmy od okręgu, który reprezentuje kąt $360°$. To wcześniej omówiony dźwięk Fis. Następnie dodajmy drugi okrąg otrzymując wartość $720°$ – kolejne Fis, trzy okręgi to $1080°$ czyli harmoniczna kwinta do Fis czyli Cis. Cztery okręgi dają $1440°$ (Fis), pięć okręgów daje $1800°$ (Ais), sześć okręgów – $2160°$ czyli kolejne Cis. W ten sposób możemy zobaczyć i usłyszeć wzór „Kwiatu Życia", który intryguje ludzkość od wielu lat.

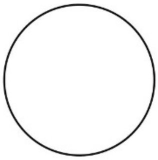
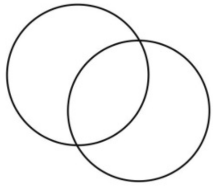
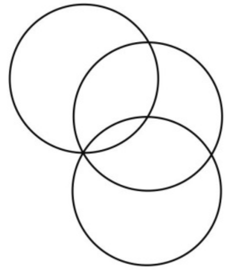
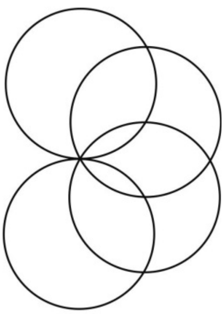
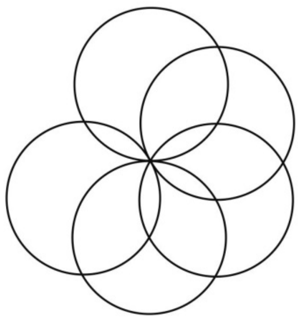
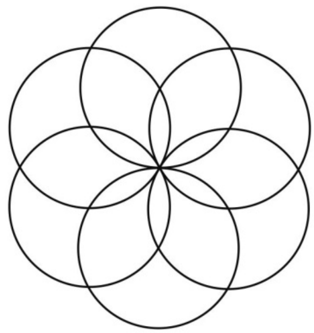
Przedstawiona obok tabela 5 przedstawia to dokładnie.



Rys. 3. „Kwiat Życia"

[2] Święta Geometria (źródło: goldenmean.info) – opisuje wszystkie działania podlegające różnym wzorcom za pomocą kształtów, form i proporcji. Jest to uniwersalny język czystych prawd bazujący na wewnętrznym działaniu natury.

Tabela. 5

$360° \equiv 360\ Hz \equiv Fis$	$720° \equiv 720\ Hz \equiv Fis$	$1080° \equiv 1080\ Hz \equiv Cis$
		
$1440° \equiv 1440\ Hz \equiv Fis$	$1800° \equiv 1800\ Hz \equiv Ais$	$2160° \equiv 2160\ Hz \equiv Cis$
		

Zobaczyliście zatem jak mogą wyglądać dźwięki oraz w jaki sposób można usłyszeć geometrię. Do wygenerowania dźwięków o określonej częstotliwości można użyć generatora dźwięków, np. na stronie: http://onlinetonegenerator.com/.

Chciałbym jeszcze pobudzić Waszą wyobraźnię i zwrócić uwagę na ciekawą cechę wspomnianych tu liczb, czyli na to, że suma cyfr każdej z tych liczb jest równa 9. Przyjrzyjmy to jako cechę wiążącą wspomniane liczby z liczbą 432. Wiele instrumentów muzycznych było strojone do tonu A = 432 Hz. Dzisiaj jest to A = 440 Hz. Jest wiele interesujących hipotez na temat zmiany stroju z 432 Hz na 440 Hz, miało to miejsce w pierwszej połowie XX wieku. Przyjrzyjmy się strojowi na 432 Hz oraz na tabelę, w której – choć tego na pierwszy rzut oka nie widać – główną rolę gra cyfra 9. Znajduje się nie tylko w sumie każdego dźwięku w tabeli, ale również jest cyfrą wymaganą do poruszania się w górę i w dół skali, np. zacznijmy od dźwięku A = 216 Hz. Aby uzyskać pozostałe dźwięki w tej oktawie, wystarczy dodać lub odjąć cyfrę 9. W tabeli znajduje się jeszcze dodatkowy dźwięk oznaczony jako Ab, którego nie ma w obecnej skali równomiernie temperowanej. Dźwięk ten pozwala zachować wspomnianą wcześniej regułę poruszania się po skali (Tabela 6).

Tabela. 6

	Oktawa 1	Oktawa 2	Oktawa 3	Oktawa 4	Oktawa 5
C	126	252	303	1008	2016
C#	135	270	540	1080	2160
D	144	288	576	1152	2304
D#	153	306	612	1224	2448
E	162	324	648	1296	2592
F	171	342	684	1368	2736
F#	180	360	720	1440	2880
G	189	378	756	1512	3024
G#	198	396	792	1584	3168
Ab	207	414	828	1656	3312
A	216	432	864	1728	3456
A#	225	450	900	1800	3600
B (H)	234	456	936	1872	3755

Spójrzmy jeszcze na jedną z tych ciekawych liczb – 2160. Liczbę wyrażoną przez sześcian i wzór „Ziarna Życia". Trochę ją zmodyfikujmy. Jeśli zabierzemy od niej zero (podzielimy przez 10) to otrzymamy połowę liczby 432. Okazuje się, że te dwie liczby wzbudzają bardzo duże zainteresowanie wielu badaczy i naukowców. Występują one w miarach wielkoskalowych, np. w astronomii. Są związane z niezwykle dokładnymi obliczeniami astronomicznymi słynnej cywilizacji Majów.

Ciekawostka 1.

Dzień ma 86 400 sekund, albo też 43 200 sekund w 12 godzinach dnia i 43 200 sekund w 12 godzinach nocy.

Ciekawostka 2.

Średnica naszego Księżyca liczona w milach wynosi prawie 2160 mil, zaś Słońca to ponad 864 000 mil. Jaki jest związek między nimi a liczbą 432? Oto proste rachunki:

$$432 : 2 = 216$$
$$432 \times 2 = 864$$

Oczywiście liczbami i działaniami matematycznymi można bawić się w nieskończoność i otrzymywać ciekawe wyniki.

Mam nadzieję, ze rozbudziłem Waszą wyobraźnię i do tego tematu chętnie będziecie powracać. Myślę również, że od dziś będziecie bardziej melodyjnie patrzeć na geometrię, zaczniecie ją słyszeć i będziecie widzieć dźwięki.

Źródła:
youtube.pl
wikipedia.pl
goldenmean.info

Tomasz Grębski
Nauczyciel matematyki w Zespole Szkół Nr 2 w Kraśniku,
autor matematycznego portalu www.tomaszgrebski.pl