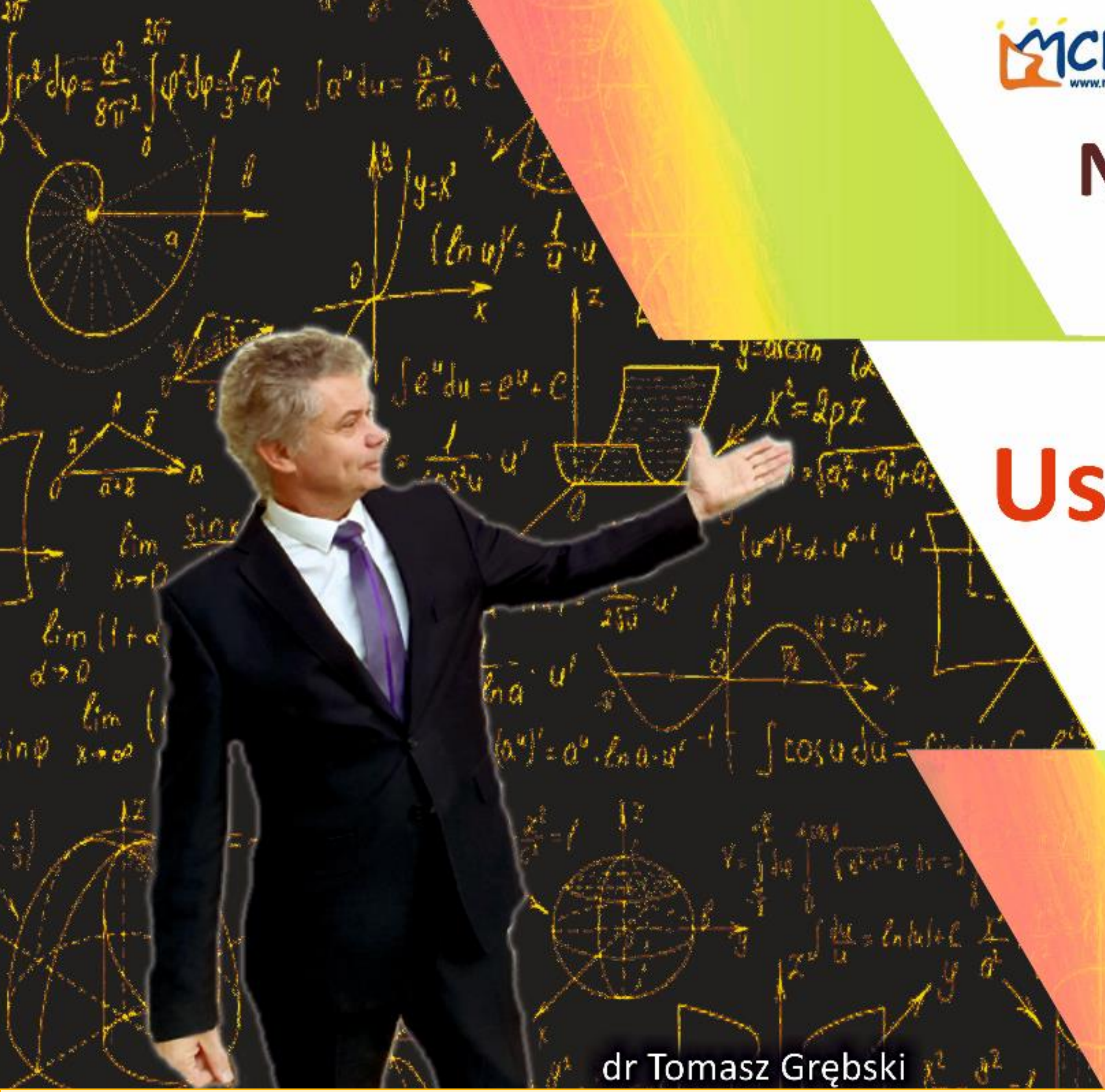
MCDN www.mcdn.edu.pl INSTYTUCJA WOJEWÓDZTWA MAŁOPOLSKIEGO

MAŁOPOLSKA

Nie muszę, ale chcę uczyć się matematyki.

Usłyszeć geometrię i zobaczyć dźwięki.



The Mathteacher
PORTAL MATEMATYCZNY

Jak pobudzić wyobraźnię uczniów i jak zainspirować uczniów do samodzielnego rozwijania myślenia matematycznego?

Współczesna szkoła

Szkoła to dominująca jednostka wśród instytucji i placówek oświatowo-wychowawczych. Stawiane przed nią cele ciągle się zmieniają. Jedni widzą w niej instytucję, od której zależy rozwój kultury i cywilizacji, a inni sądzą, że należy społeczeństwo jak najszybciej od niej uwolnić

- Jaka powinna być szkoła, a jaka jest?
- Jaka jest polska szkoła?
- Czy jest tradycyjna czy twórcza?

The Mathteacher
PORTAL MATEMATYCZNY

Jak pobudzić wyobraźnię uczniów i jak zainspirować uczniów do samodzielnego rozwijania myślenia matematycznego?

Działalność współczesnej szkoły musi być nastawiona na rozwijanie kreatywności i aktywności twórczej, na wychowanie człowieka innowacyjnego, potrafiącego prowadzić twórczy styl życia. Na to od wielu lat zwracają uwagę przedstawiciele psychologii edukacyjnej, psychologii twórczości, pedagogiki ogólnej i pedagogiki twórczości. Podkreśla się pozytywną rolę twórczej aktywności jednostki w odnoszeniu sukcesów nie tylko w szkole, ale również później w życiu dorosłym. Od dawna wzywa się do realizowania idei „edukacji jako działalności twórczej”, która skupia wokół siebie ideologie twórczego ucznia – ucznia aktywnego, samodzielnego i kreatywnego; twórczego nauczyciela – posiadającego kreatywny stosunek do swojego zawodu oraz szkoły jako twórczej organizacji – w której uczenie będzie dominować nad nauczaniem, a potrzeby i zainteresowania uczniów wyznaczałyby kierunek działań edukacyjnych.

The Mathteacher
PORTAL MATEMATYCZNY

Jak pobudzić wyobraźnię uczniów i jak zainspirować uczniów do samodzielnego rozwijania myślenia matematycznego? **Szkoła twórcza czy tradycyjna?**

Szkoła tradycyjna bazuje tylko na przekazywaniu wiedzy przy wykorzystaniu metod podających oraz egzekwowania tej wiedzy i oceniania jej opanowania. Nauczyciel w szkole tradycyjnej jest osobą dominującą, zaś uczeń przyjmuje postawę bierną, jego zadaniem jest tylko przyswoić przekazywane przez nauczyciela treści. Programy, które muszą być realizowane wraz z podręcznikami dostosowanymi do nich często przesłaniają potrzeby i zainteresowania uczniów. W. Okoń pisał: „W szkole tradycyjnej uczniowie pozostają całkowicie w cieniu swych nauczycieli”.

The Mathteacher
PORTAL MATEMATYCZNY

Jak pobudzić wyobraźnię uczniów i jak zainspirować uczniów do samodzielnego rozwijania myślenia matematycznego? **Szkoła twórcza czy tradycyjna?**

Zupełnie inaczej wyglądają założenia **szkoły twórczej,** w której - jak pisze H.Rowid - "wyzwalają się energie potencjalne tkwiące w duszy dziecka - która przetwarza te energie w wartości, wzbogacające i doskonalące życie jednostki i społeczeństwa pod względem etycznym, intelektualnym i estetycznym". W szkole twórczej na pierwszy plan wysuwa się uczeń, który dochodzi do wiedzy dzięki swojej aktywności i samodzielnemu rozwiązywaniu różnych sytuacji problemowych, zaś nauczyciel wspiera go w jego działaniach, daje różne wskazówki, udziela rad i w razie potrzeby pomaga. W tej szkole **program nauczania wytyczają zainteresowania ucznia i jego uzdolnienia.** Uczeń staje się pierwszoplanową postacią w procesie edukacji. W szkole twórczej mamy więc zupełnie inne podejście nauczycieli do uczniów. Autorytet nauczyciela nie jest sztucznym tworem, który jest często podtrzymywany obawą czy strachem, ale jest tworzony na podstawie osobowości nauczyciela, jego kompetencji, wyznawanych wartości i oparty jest na zaufaniu i przyjaźni.

Jak pobudzić wyobraźnię uczniów i jak zainspirować uczniów do samodzielnego rozwijania myślenia matematycznego? **Szkoła twórcza czy tradycyjna?**

Analizując te charakterystyki jak również sytuację w obecnej oświacie można zauważyć, że na chwilę obecną ma więcej ze szkoły tradycyjnej niż twórczej. System oceniania, programy nauczania, czy nawet klucze do egzaminów zewnętrznych w pewnym stopniu ograniczają działania nauczyciela. Nauczyciel jest rozliczany z wyników nauczania, a zainteresowania ucznia czy też jego indywidualne pomysły często schodzą na drugi plan. Niestety to również powoduje dużą falę krytyki skierowaną na współczesne szkolnictwo czy też na nauczycieli, którzy muszą realizować z góry narzucone programy. System ten jest krytykowany zarówno przez uczniów i rodziców, jak też i nauczycieli. Krytykowana jest nieatrakcyjność szkół, programy nauczania, niedofinansowanie szkół, niskie kwalifikacje nauczycieli, niskie zarobki nauczycieli, itp. Dla wielu nauczycieli nauczanie nie jest przyjemnością, lecz przejściem przez kolejne lekcje. Szkoła jest ukierunkowana na wiadomości, a nie umiejętności, a nauczanie podporządkowane jest ocenianiu. **Obecnie nawet rodzic nie pyta dziecka czego się nauczyło, tylko jaką dostało ocenę.**

Mimo tej krytyki szkoły, wielu nauczycieli jest inicjatorami różnych twórczych działań, starają się rozbudzić w uczniach kreatywność i samodzielność, zyskując przy tym autorytet, który staje się tym prawdziwym autorytetem, a nie tym wymuszonym.

Jak pobudzić wyobraźnię uczniów i jak zainspirować uczniów do samodzielnego rozwijania myślenia matematycznego?

Własna inicjatywa i wszechstronność nauczyciela

Zastanówmy się co można by zrobić, aby mimo wielu przeszkód uczynić szkołę bardziej twórczą, a uczniów zachęcać do kreatywności i działań. Czy ciągłe narzekanie na system edukacji nie „nakręca” nas przypadkiem negatywnie? Nic nie jest idealne i „nobody is perfect” – jak to mogliśmy usłyszeć w filmie „Pół żartem, pół serio” z 1959 roku.

Zatem może by tak podjąć własną inicjatywę? Żyjemy w świecie w bardzo dużym stopniu zcyfryzowanym, technologie komputerowe weszły do codziennego życia, zasoby Internetu nie mają granic. Młode pokolenia dorastają już od kołyski z tabletem w rękach (niestety) i dla nich ten cyfrowy świat jest czymś normalnym. Jednak należy pomóc młodym ludziom odnaleźć się w nim, być przewodnikiem we współczesnym świecie, w którym mimo takich technologii jest wiele niebezpieczeństw.

Czy wszystko zaoferuje nam szkoła? Na pewno nie. **Wybierając zawód nauczyciela czy pedagoga należy liczyć się z ciągłym rozwojem i doskonaleniem.**

Jak pobudzić wyobraźnię uczniów i jak zainspirować uczniów do samodzielnego rozwijania myślenia matematycznego?

Jak pobudzić wyobraźnię uczniów? → **Należy zacząć od siebie**

Interdyscyplinarność nauczyciela

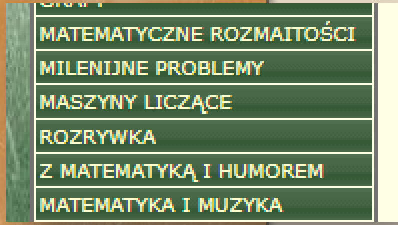
Matematyki należy odpowiednio uczyć i proces ten jest złożony. To trudna dziedzina i można powiedzieć, że „złotej recepty” na to nie ma, ponieważ zależy to zarówno i od uczniów, jak i nauczyciela. **Tak jak uczniowie muszą nauczyć się jej uczyć, tak i nauczyciele muszą nauczyć się jej uczyć**. Brzmi tak samo, ale to dwa różne punkty widzenia. To od nauczyciela w dużym stopniu zależy, czy uczeń polubi matematykę i co najważniejsze - ją zrozumie.

Aby ten przedmiot stał się atrakcyjny i lubiany przez uczniów w bardzo dużym stopniu zależy od cech i umiejętności nauczyciela oraz jego **interdyscyplinarności**. Należy samemu najpierw poznać wiele ciekawostek z nauczanego przedmiotu, znacznie poszerzyć swoją wiedzę i umiejętności poza nauczany przedmiot. Być na bieżąco z trendami młodzieżowymi do tego stopnia, że warto nawet posłuchać muzyki, której słuchają uczniowie, czy pooglądać ich ulubione filmy, czy też pograć choć trochę w jakąś ulubioną przez uczniów grę komputerową. Do tego dołączamy przyjazną atmosferę na lekcji, trochę humoru i sukces gwarantowany.

Jak pobudzić wyobraźnię uczniów i jak zainspirować uczniów do samodzielnego rozwijania myślenia matematycznego?

Interdyscyplinarność nauczyciela
Kilka przykładów ukazujących interdyscyplinarny charakter pracy nauczyciela matematyki:

1. **Wszechstronna wiedza potrzebna do pokazywania zastosowania matematyki oraz pokazania jej piękna, co na pewno zainteresuje uczniów.**



Ciekawość poznawcza pełni wielką rolę w procesie uczenia. Dobrze wiemy, że jeśli nas coś zainteresuje, to jesteśmy w stanie sami wyszukać wiele informacji w tym temacie i rozwinąć swą wiedzę. To ona motywuje wewnętrznie. Istnieją dziedziny, w których w bardzo dużym stopniu korzysta się z matematyki, a w każdej z tych dziedzin można szukać celów uczenia się. Według J. Dormolena, celów należy poszukiwać w takich dziedzinach jak: zjawiska natury, stosunki międzyludzkie, produkcja i usługi, kultura oraz przekaz i odbiór informacji. **Pokazujmy zatem, że matematyka jest wszędzie wokół nas i nie da się jej zepchnąć na drugi plan. Poświęćmy choć kilka lekcji w roku szkolnym, aby to pokazać.** Jest wiele tematów popularyzujących matematykę i pokazujących jej obecność wokół nas – nawet mówi się, że „matematyka jest wszędzie”. Można znaleźć wiele przykładów w literaturze jak również w filmach dokumentalnych. Przy wyborze takiego tematu ważnym jest, aby nauczyciel wybrał temat, w których sam czuję się „pewnie” i chętnie rozwinie dany temat oraz odpowie na nieprzewidziane pytania uczniów.

The Mathteacher PORTAL MATEMATYCZNY

Jak pobudzić wyobraźnię uczniów i jak zainspirować uczniów do samodzielnego rozwijania myślenia matematycznego?

Interdyscyplinarność nauczyciela
Kilka przykładów ukazujących interdyscyplinarny charakter pracy nauczyciela matematyki:

2. **Przysłowiowa „kreda i tablica".**
W XXI wieku to już niestety za mało. Nasze społeczeństwo ciągle ewoluuje, zmienia się, inaczej odbiera rzeczywistość. Należy więc sięgać do nowych narzędzi i metod, które pozwolą uatrakcyjnić lekcje matematyki. Związane jest to również z rozwojem technologii komputerowej, za którą – jeśli chcemy być nowocześni – powinniśmy nie tylko z niej korzystać, ale i starać się nadążać za nią. Oczywiście tradycyjna „kreda i tablica" pełni bardzo ważną rolę i na pewno z tych narzędzi w nauczaniu matematyki nie da się zrezygnować, ale należy rozwijać swoje technologiczne horyzonty. Postęp techniczny trwa nieustannie i na pewno nie da się go zatrzymać. Wykorzystujmy więc nowe technologie komputerowe na lekcjach matematyki. Wykorzystując nowoczesne programy czy portale matematyczne, stajemy się nowoczesnym nauczycielem i zyskujemy w oczach uczniów. Programów matematycznych jest bardzo wiele, np. Wolfram Alpha, GeoGebra, Desmos.

Jak pobudzić wyobraźnię uczniów i jak zainspirować uczniów do samodzielnego rozwijania myślenia matematycznego?

Interdyscyplinarność nauczyciela
Kilka przykładów ukazujących interdyscyplinarny charakter pracy nauczyciela matematyki:

3. **Internet.**
Wiemy, że Internet zawitał do naszego życia na dobre. Zatem wykorzystujmy go też do celów edukacyjnych, pamiętając przy tym, że z Internetu należy korzystać „z głową". Wielu uczniów powie: po co mam coś pamiętać, jak jest to w Internecie. To bardzo złe podejście. Pamięć należy ćwiczyć, a wiedzę swą rozwijać. Dzisiaj nie „zabłyśniemy" przed nikim z przeglądarką internetową w ręku. Zatem jak można wykorzystać Internet w procesie nauczania matematyki? Doskonale można go wykorzystać do rozwiązywania testów on-line. Obecnie dobrze rozwinęły się platformy edukacyjne i system nauki e-learning. Ja sama, wykorzystując system moodle, korzystam z Matematycznej Platformy Edukacyjnej, z której korzystają również moi uczniowie. To świetne narzędzie, a przy tym świetna matematyczna zabawa. Poza tym mamy wiele informacji matematycznych w sieci, m.in. mamy matematyczne fora dyskusyjne, na których można dzielić się wiedzą i swoimi pomysłami.

The Mathteacher
PORTAL MATEMATYCZNY

Jak pobudzić wyobraźnię uczniów i jak zainspirować uczniów do samodzielnego rozwijania myślenia matematycznego?

Interdyscyplinarność nauczyciela
Kilka przykładów ukazujących interdyscyplinarny charakter pracy nauczyciela matematyki:

4. **Lekcje video**
Kolejnym narzędziem, które warto wykorzystywać w procesie nauczania, to lekcje video. Mamy obecnie wiele możliwości, aby stworzyć taką lekcje matematyki czy też z każdego innego przedmiotu. Jest wiele programów przechwytujących nasze działania na komputerze, a dokładniej tego co się dzieje na monitorze. To doskonałe uzupełnienie lekcji szkolnych, świetna możliwość utrwalenia materiału jak również, w przypadku nieobecności ucznia na lekcji, możliwość nadrobienia zaległości. Osobiście tworzę takie lekcje i mam wiele sygnałów zwrotnych od uczniów i ich rodziców, że jest to bardzo dobra forma uzupełnienia tradycyjnych szkolnych lekcji. Ponadto moi uczniowie również zaczęli takie lekcje nagrywać.

The Mathteacher
PORTAL MATEMATYCZNY

Jak pobudzić wyobraźnię uczniów i jak zainspirować uczniów do samodzielnego rozwijania myślenia matematycznego?

Interdyscyplinarność nauczyciela
Kilka przykładów ukazujących interdyscyplinarny charakter pracy nauczyciela matematyki:

5. **Współczesny uczeń i własna inicjatywa.**
Dzisiejsza młodzież jest bardzo nieodporna na jakiekolwiek niepowodzenia. Należy więc okazywać dużo cierpliwości i empatii, ale przy tym oczywiście wymagać. Co by się nie działo, motywujmy uczniów pozytywnie i zachęcajmy do pracy, bo jak powiedział M. Twain: **„Jedynym miejscem, gdzie sukces występuje przed wysiłkiem jest słownik"** . Warto też czasem postawić lepszą ocenę na tzw. „zachętę”. To zadziała i to zadziała pozytywnie.
Ponadto współczesny nauczyciel powinien (musi) wykazywać wiele **własnej inicjatywy**, m.in. warto prowadzić dodatkowe zajęcia dla uczniów czy też zachęcać do udziału w konkursach przedmiotowych. Udział uczniów w takich konkursach wzmacnia również ich pewność siebie. Ważną cechą nauczyciela jest też chęć organizowania wyjazdów na wycieczki przedmiotowe, np. na wyższe uczelnie na jakiś wykład. Udział w takim wykładzie na uczelni, to przyjemne z pożytecznym. Uczniowie poznają atmosferę uczelni, widzą jak wygląda uczelnia od wewnątrz. Zdecydowanie ułatwia to potem ich początki studiowania i adaptację.
Wiadomym jest, że w obecnych czasach szkoły wręcz walczą o najlepsze wyniki. Niestety są też ujemne strony tego zjawiska. Mimo dobrych wyników uczniowie nie wiedzą często, co chcieliby w życiu robić. Idą na studia i już na pierwszym roku zmieniają kierunek. Dlatego **nauczyciel powinien odkrywać mocne i słabe strony ucznia**, doradzać mu w czym mógłby się zrealizować zawodowo, odkryć talent ucznia.

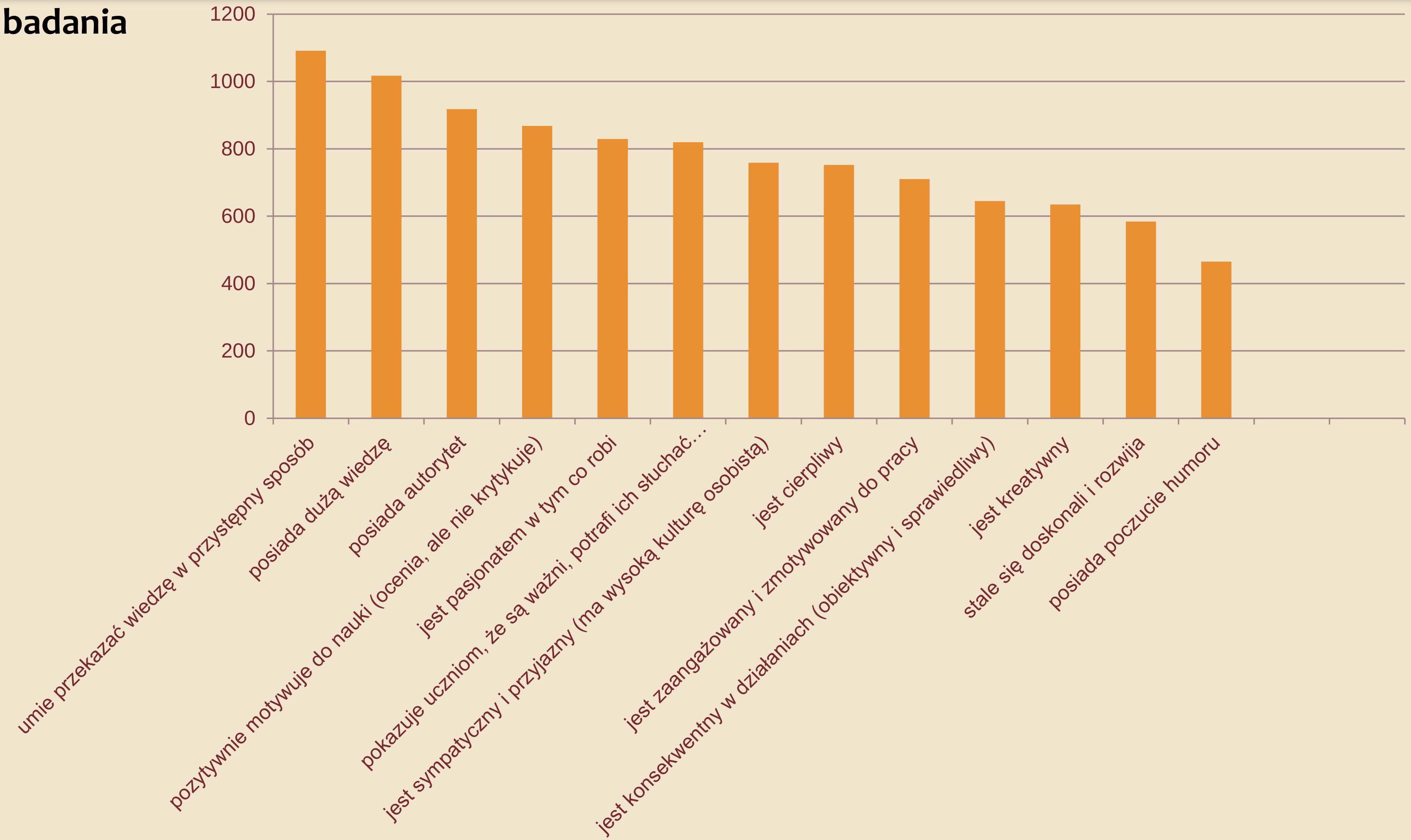
Jak pobudzić wyobraźnię uczniów i jak zainspirować uczniów do samodzielnego rozwijania myślenia matematycznego?

Jaki powinien być nauczyciel XXI wieku?

Zawód nauczyciela jest niezwykle specyficzny i zależy od wielu czynników zarówno społeczno-politycznych jak i gospodarczych. Model nauczyciela kształtowano więc w dużym stopniu na wzór epoki czy ustroju państwa. Nauczyciel raz musiał być pokornym sługą czy posłusznym urzędnikiem, a raz człowiekiem wszechstronnym. W literaturze dotyczącej wzorca nauczyciela powtarza się wizja pedagoga obdarzonego specjalnym „talentem pedagogicznym”. Potocznie mówimy wtedy, że „ma się to coś”. Czyli są to jakieś wrodzone predyspozycje, które sprawiają, że nauczyciel potrafi być mistrzem w wielu aspektach wychowawczo-dydaktycznych – jest mistrzem i pod kątem wiedzy i umiejętności, a jednocześnie przekazuje wartości wychowawcze od podstawowych zasad dobrego wychowania po wartości patriotyczne.

Jak pobudzić wyobraźnię uczniów i jak zainspirować uczniów do samodzielnego rozwijania myślenia matematycznego?
Ranking cech nauczyciela XXI wieku

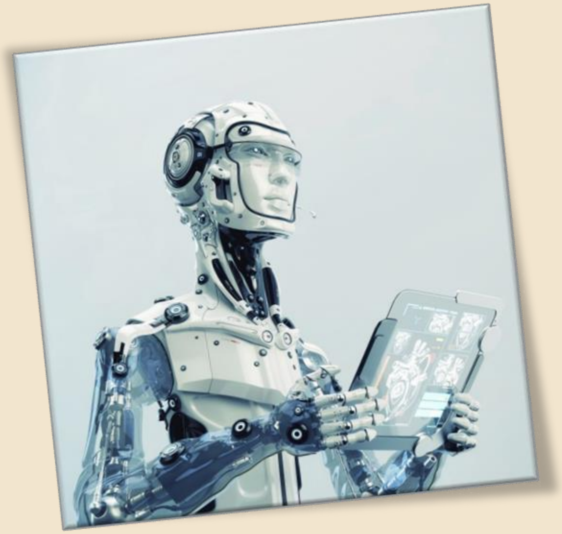
Własne badania



The Mathteacher
PORTAL MATEMATYCZNY

Jak pobudzić wyobraźnię uczniów i jak zainspirować uczniów do samodzielnego rozwijania myślenia matematycznego?

Nauczyciel jest niewątpliwie najważniejszym ogniwem w procesie nauczania. Wielu zastanawia się czy rolę nauczyciela przejmą w przyszłości inteligentne maszyny? Według mnie w obecnym stuleciu raczej nam to nie grozi, choć kto wie? Przecież sztuczna inteligencja rozwija się bardzo szybko i zaskakuje nas swoimi rozwiązaniami czy pomysłami, ale dobry i wszechstronny nauczyciel na pewno pozostanie na długo (i oby na zawsze) głównym ogniwem w procesie edukacyjnym człowieka.



Myśl pozytywnie i nauczaj kreatywnie!

Czy liczbami możemy się bawić?

Oczywiście, że tak. Liczby plus różne działania i mamy praktycznie każdy wynik. Dobrze by było jednak, aby taka zabawa z liczbami i otrzymywane wyniki miały swoje odzwierciedlenie w rzeczywistości. Takich przykładów można znaleźć naprawdę bardzo dużo i to w każdej dziedzinie. (od Pitagorejczyków po czasy współczesne)

Liczbami możemy bawić się w nieskończoność. Można na nich przeprowadzić takie działania, że zobaczymy w końcu te liczby, które chcemy zobaczyć, ale bardzo ważne jest, aby utrzymać matematyczny rygor i racjonalizm, bo jeśli tego nie zrobimy, to z matematyka staniemy się numerologiem.

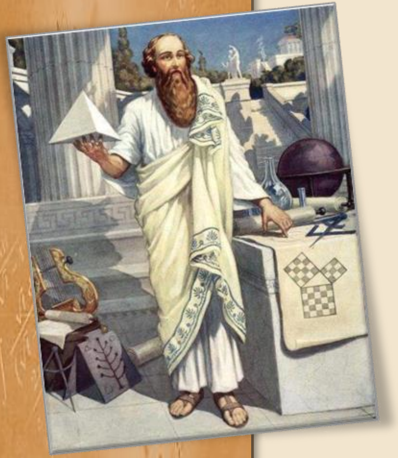
Usłyszeć geometrię i zobaczyć dźwięki

Propozycja na rozbudzenie wyobraźni uczniów.

Zabawę z liczbami pokażę na podstawie związków matematyki z muzyką, które badam od wielu lat.

Czytamy ten tytuł i zastanawiamy się czy nie ma w nim błędu i zapewne powiemy: *chyba powinno być „Zobaczyć geometrię i usłyszeć dźwięki”*. Otóż nie, wszystko jest w jak najlepszym porządku.

Zacznijmy od początku. W 6 wieku p.n.e. na greckiej wyspie Samos żył sławny matematyk – **Pitagoras**. Przewodził on szkole myślenia łączącej filozofię, matematykę, muzykę i oczywiście geometrię. Ich hasło przewodnie brzmiało ***Wszystko jest liczbą***. Pitagorejczycy jako pierwsi odkryli matematyczną harmonię w muzyce i wiedzieli również, że człowiek odbiera jako harmonijne zestawienie takich dźwięków, których częstotliwości pozostają ze sobą w stosunku będącym ilorazem niewielkich liczb naturalnych. Odkryli tzw. wielką czwórkę liczb - **1, 2, 3, 4**. Zauważyli, że jeżeli długości dwóch napiętych jednakową siłą strun mają się jak 2:1, to struny te dają przyjemne współbrzmienie. Podobnie 3:2, 4:3 – te zależności są liczbowym opisem konkretnych interwałów muzycznych: oktawy, kwinty czystej i kwarty czystej. Ich obserwacje można streścić w stwierdzeniu, że „harmonia wyraża się przez stosunek dwóch liczb naturalnych i tym jest pełniejsza, im liczby te są mniejsze”. Odkrycie Pitagorejczyków doprowadziło do stworzenia skali muzycznej, która jest bardzo zbliżona do skali równomiernie temperowanej używanej obecnie w muzyce.



Usłyszeć geometrię i zobaczyć dźwięki

W muzyce mamy różne „stroje”. W stroju muzycznym (nie tak dawnym) pojawia nam się liczba 432. Jest to liczba dość ważna w tzw. stroju pitagorejskim, ale i nie tylko. Czy sam Pitagoras traktował ją wyjątkowo, tego nie wiemy, ale ta liczba jest naprawdę bardzo ciekawa.
Wiele starożytnych instrumentów muzycznych – od tybetańskich mis po flety amerykańskich Indian – wydaje ten sam ton, który wibruje z częstotliwością 432Hz. Przez dziesięciolecia, większość instrumentów także była strojona do częstotliwości 432Hz. Nasuwa się pytanie: kto wybrał tę szczególny dźwięk jako podstawę do strojenia instrumentów i dlaczego? Aby to wyjaśnić powróćmy do jednej z pasji Pitagorasa – geometrii. Wiemy, że dla Pitagorasa i jego uczniów geometria i matematyka była kluczem do natury wszelkiego życia. I kto wie, może nim jest?

Konstrukcja wiedeńska układu strun

Konstrukcja angielska (krzyżowa) układu strun

Usłyszeć geometrię i zobaczyć dźwięki

Na początek rozważmy podstawowe geometryczne kształty jakimi są: trójkąt, kwadrat i pięciokąt. Każdemu z tych wielokątów przyporządkujmy sumę kątów wewnętrznych. W ten sposób otrzymujemy liczby, które będą odpowiadać konkretnym kształtom. Suma kątów wewnętrznych trójkąta to 180 stopni, kwadratu – to 360 stopni, a pięciokąta to 540 stopni. Sumę tą możemy obliczyć również z popularnego wzoru matematycznego:
$S = (n-2) \cdot 180°$, gdzie n oznacza liczbę boków wielokąta.

Geometria dwuwymiarowa

Wielokąt	Suma kątów wewnętrznych
Trójkąt	180°
Kwadrat	360°
Pięciokąt	540°
Sześciokąt	720°
Siedmiokąt	900°
Ośmiokąt	1080°

Usłyszeć geometrię i zobaczyć dźwięki

Przenieśmy te liczby na cykle drgań na sekundę czyli częstotliwości mierzone w Hz. Pozwoli to nam usłyszeć te liczby. A zatem:

$$\begin{aligned} 180° &\equiv 180Hz \\ 360° &\equiv 360Hz \\ 540° &\equiv 540Hz \\ 720° &\equiv 720Hz \\ 900° &\equiv 900Hz \\ 1080° &\equiv 1080Hz \\ &itd. \end{aligned}$$

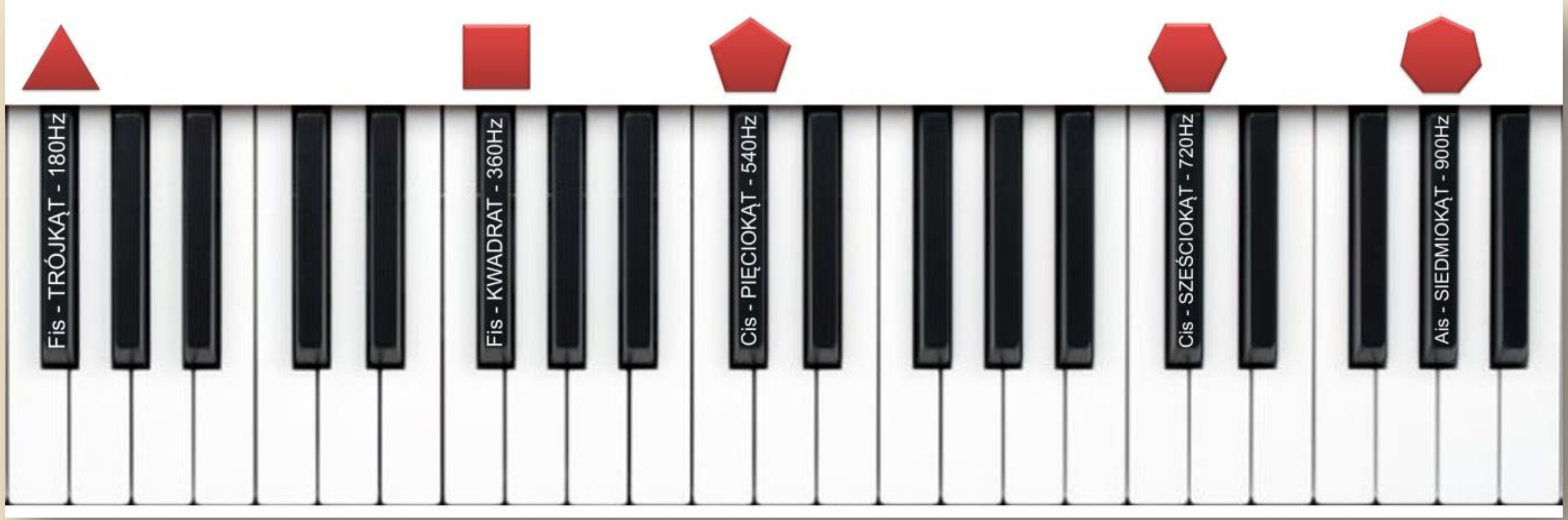
Jeśli teraz przeniesiemy się do muzyki, pamiętając, że jesteśmy w stroju A=432Hz i użyjemy nazw nut, to okazuje się, ze 180Hz to dźwięk Fis, 360Hz to również dźwięk Fis, ale oktawę wyżej. Dźwięk 540Hz to harmoniczna kwinta do poprzednich dźwięków. 720Hz to kolejne Cis, zaś 900Hz to dźwięk Ais, który jest wymagany do akordu durowego Fis. 1080Hz to kolejne Cis.

Geometria dwuwymiarowa			
Wielokąt	Suma kątów wewnętrznych	Częstotliwość	Nazwa dźwięku
Trójkąt	$180°$	$180Hz$	Fis
Kwadrat	$360°$	$360Hz$	Fis
Pięciokąt	$540°$	$540Hz$	Cis
Sześciokąt	$720°$	$720Hz$	Cis
Siedmiokąt	$900°$	$900Hz$	Ais
Ośmiokąt	$1080°$	$1080Hz$	Cis

Usłyszeć geometrię i zobaczyć dźwięki

A zatem **zobaczmy dźwięki** akordu Fis-dur w dwuwymiarowej geometrii:

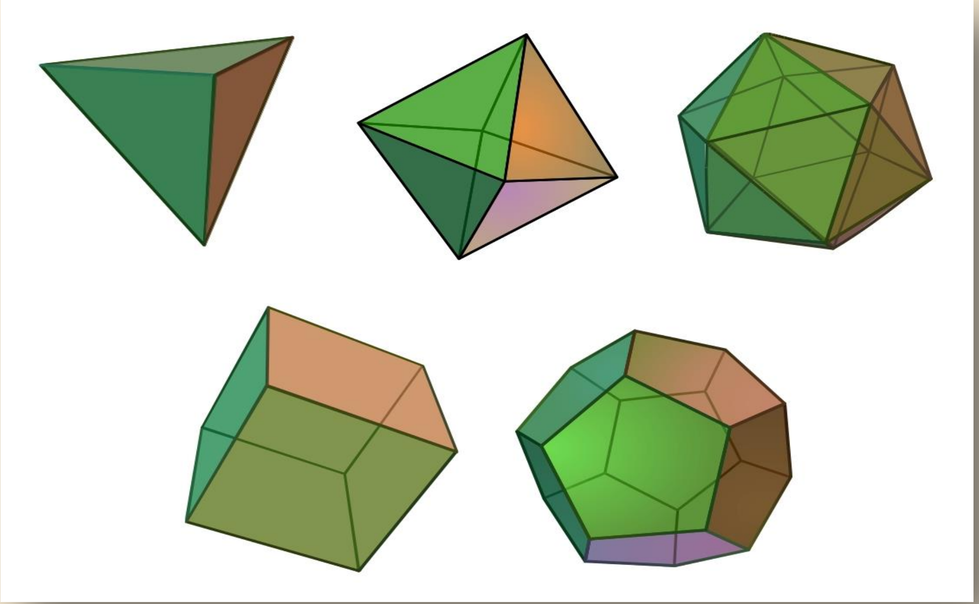
A na klawiaturze fortepianowej wygląda to tak:



Usłyszeć geometrię i zobaczyć dźwięki

Geometria trójwymiarowa

Ciekawe, prawda? Pójdźmy dalej i przenieśmy się teraz w geometrię przestrzenną. Zobaczmy czy i tam uda nam się znaleźć podobne zależności. Warto w tym momencie wspomnieć o sławnym filozofie i matematyku jakim był Platon. Platon - z powodów estetycznych - wprowadził do geometrii (tak dawniej zwano matematykę), ścisły kanon metodologiczny. Wg niego dozwolone konstrukcje geometryczne mogły być prowadzone tylko przy użyciu cyrkla i linijki. Do dziś taki rodzaj konstrukcji nosi nazwę **konstrukcji platońskich.** Prawdziwą obsesją Platona stało się odnalezienie najprostszych trójwymiarowych geometrycznych kształtów. Jego poszukiwania zakończyły się tym, co obecnie nazywamy bryłami platońskimi.



Usłyszeć geometrię i zobaczyć dźwięki

Zobaczmy teraz czy i jak wpasowują się one w geometryczne dźwięki omówione wcześniej.
Na początek rozważmy czworościan. Jego wszystkie ściany to trójkąty. Jeśli dodamy wszystkie kąty wewnętrzne każdej ściany to otrzymamy:

$$\mathbf{4\ x\ 180° = 720° \equiv 720\mathit{Hz}}$$

A zatem widzimy, że jest to omówiony wcześniej dźwięk Fis.
Rozważmy teraz sześcian, jego ściany to oczywiście kwadraty. Jeśli dodamy wszystkie kąty wewnętrzne każdej ściany to otrzymamy:

$$\mathbf{6\ x\ 360° = 720° \equiv 2160\mathit{Hz}}$$

2160Hz to przecież wysokie Cis.
Następna ciekawa figura to ośmiościan zbudowany z ośmiu trójkątów. Jeśli dodamy wszystkie kąty wewnętrzne każdej ściany to otrzymamy:

$$\mathbf{8\ x\ 180° = 1140° \equiv 1440\mathit{Hz}}$$

Tu mamy kolejny wyższy dźwięk Fis na skali muzycznej.
Rozważmy teraz dwudziestościan, który zbudowany jest z 20 trójkątów, a więc suma jego wszystkich kątów ścian wynosi:

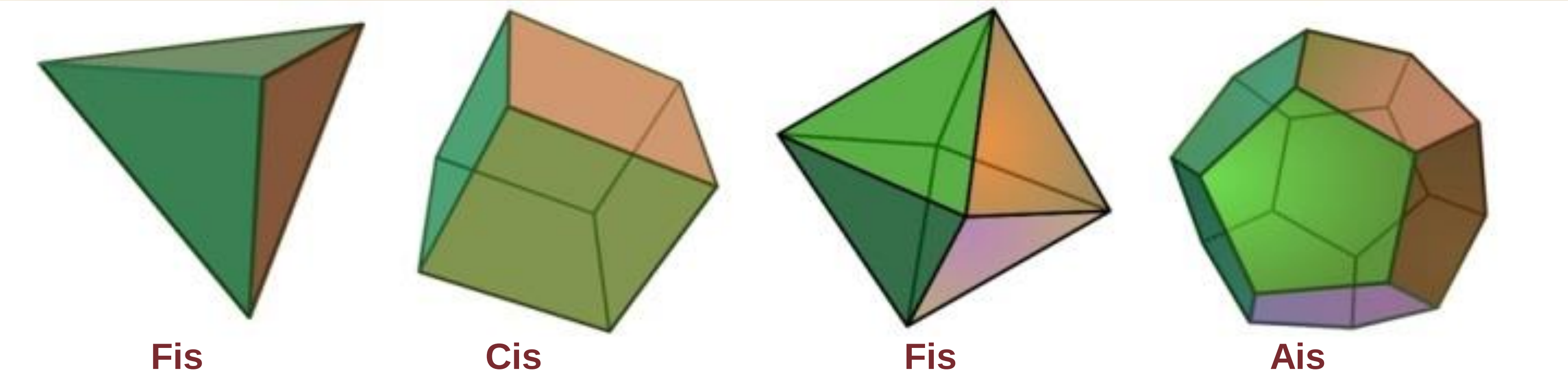
$$\mathbf{20\ x\ 180° = 3600° \equiv 3600\mathit{Hz}}$$

$3600Hz$ jako dźwięk w muzyce to Ais, który jest uzupełnieniem do pełnego akordu durowego Fis.

Usłyszeć geometrię i zobaczyć dźwięki

Geometria trójwymiarowa			
Wielokąt	Suma kątów wewnętrznych ścian bocznych	Częstotliwość	Nazwa dźwięku
Czworościan	$720°$	$720Hz$	Fis
Sześcian	$2160°$	$2160Hz$	Cis
Ośmiościan	$1440°$	$1440Hz$	Fis
Dwudziestościan	$3600°$	$3600Hz$	Ais

Akord **Fis – dur** w geometrii trójwymiarowej



Usłyszeć geometrię i zobaczyć dźwięki

Zwróćmy jeszcze uwagę na pewną interesującą rzecz, którą pokazuje tabela, że suma cyfr każdej sumy kątów wewnętrznych jest równa 9.

Geometria dwuwymiarowa				
Wielokąt	Suma kątów wewnętrznych	Częstotliwość	Nazwa dźwięku	Suma cyfr w sumie kątów
Trójkąt	$180°$	$180Hz$	Fis	1+8+0=9
Kwadrat	$360°$	$360Hz$	Fis	3+6+0=9
Pięciokąt	$540°$	$540Hz$	Cis	5+4+0=9
Sześciokąt	$720°$	$720Hz$	Cis	7+2+0=9
Siedmiokąt	$900°$	$900Hz$	Ais	9+0+0=9
Ośmiokąt	$1080°$	$1080Hz$	Cis	1+0+8+0=9

Geometria trójwymiarowa				
Wielokąt	Suma kątów wewnętrznych ścian bocznych	Częstotliwość	Nazwa dźwięku	Suma cyfr w sumie kątów
Czworościan	$720°$	$720Hz$	Fis	7+2+0=9
Sześcian	$2160°$	$2160Hz$	Cis	2+1+6+0=9
Ośmiościan	$1440°$	$1440Hz$	Fis	1+4+4+0=9
Dwudziestościan	$3600°$	$3600Hz$	Ais	3+6+0+0=9

Czy Mozart kierował się zasadami matematycznymi?

Czy Mozart traktował matematykę i liczby jak muzykę, czy muzykę jak matematykę?

Dlaczego jego muzyka jest tak doskonała?

Czy Mozart kierował się zasadami matematycznymi?

Złoty podział w sonatach Mozarta

Sonata to podstawowa forma muzyczna, wykształcona i typowa dla epoki klasycyzmu. Występuje m.in. w symfoniach, sonatach i koncertach. Istotą formy sonatowej jest dualizm tematyczny. Sonata przybrała dwuczęściową formę:

Ekspozycja, w której prezentuje się dwa kontrastujące tematy. Pierwszy temat (w tonacji głównej) jest żywy, dynamiczny, w tempie allegro; odpowiedzią jest drugi – stonowany i bardziej melodyjny, skomponowany w tonacji pokrewnej.

Przetworzenie i Repryza. Przetworzenie to najbardziej swobodna część formy sonatowej. Następuje tu przetwarzanie tematów pod względem melodycznym, rytmicznym, harmonicznym i fakturalnym. Repryza zwana inaczej reekspozycją to zakończenie sonaty, w którym powracają tematy główne.

Czy Mozart kierował się zasadami matematycznymi?

Liczba taktów w sonatach Mozarta oraz stosunki między nimi

Podział sonat wg Köchel'a	ilość taktów: Ekspozycja a	Przetworzenie i Repryza b	Całość sonaty $a+b$	$\frac{a+b}{b}$	$\frac{b}{a}$
279,I	38	62	100	1,6129	1,6316
279,II	28	46	74	1,6087	1,6429
279,III	56	102	158	1,5490	1,8214
280,I	56	88	144	1,6364	1,5714
280,II	24	36	60	1,6667	1,5000
280,III	77	113	190	1,6814	1,4675
281,II	40	69	109	1,5797	1,7250
281,II	46	60	106	1,7667	1,3043
282,III	15	18	33	1,8333	1,2000
282,III	39	63	102	1,6190	1,6154
283,I	53	67	120	1,7910	1,2642
283,II	14	23	37	1,6087	1,6429
283,III	102	171	273	1,5965	1,6765
284,I	51	76	127	1,6711	1,4902
309,I	58	97	155	1,5979	1,6724
311,I	39	73	112	1,5342	1,8718
310,I	49	84	133	1,5833	1,7143
330,I	58	92	150	1,6304	1,5862
330,III	68	103	171	1,6602	1,5147
332,I	93	136	229	1,6838	1,4624
332,III	90	155	245	1,5806	1,7222
333,I	63	102	165	1,6176	1,6190
333,II	31	50	81	1,6200	1,6129
457,I	74	93	167	1,7957	1,2568
533,I	102	137	239	1,7445	1,3431
533,II	46	76	122	1,6053	1,6522
545,I	28	45	73	1,6222	1,6071
547a,I	78	118	196	1,6610	1,5128

Na szczególną uwagę zasługuje sonata **K 279I**. Podział w niej jest wręcz doskonały, bo najbardziej zbliżony do złotego podziału. Ilość taktów jest liczbą naturalną, zatem nie da się tego zrobić dokładniej.

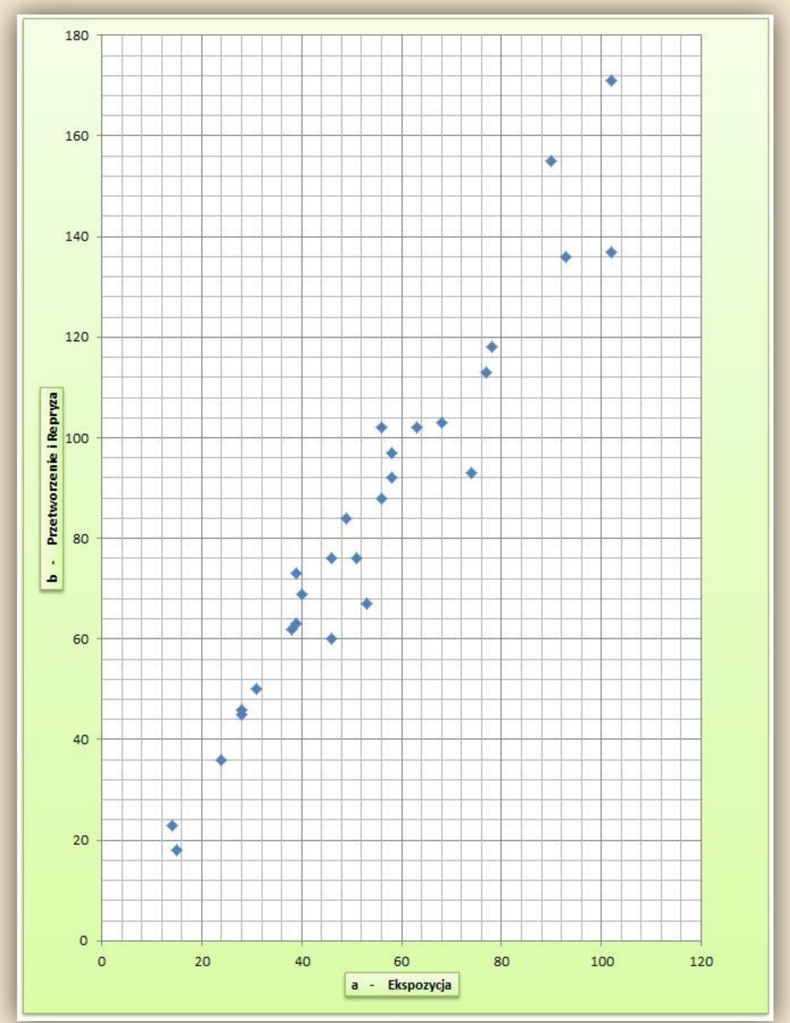
$$\frac{62}{38} = 1{,}6315\ldots$$

$$\frac{100}{62} = 1{,}6129\ldots$$

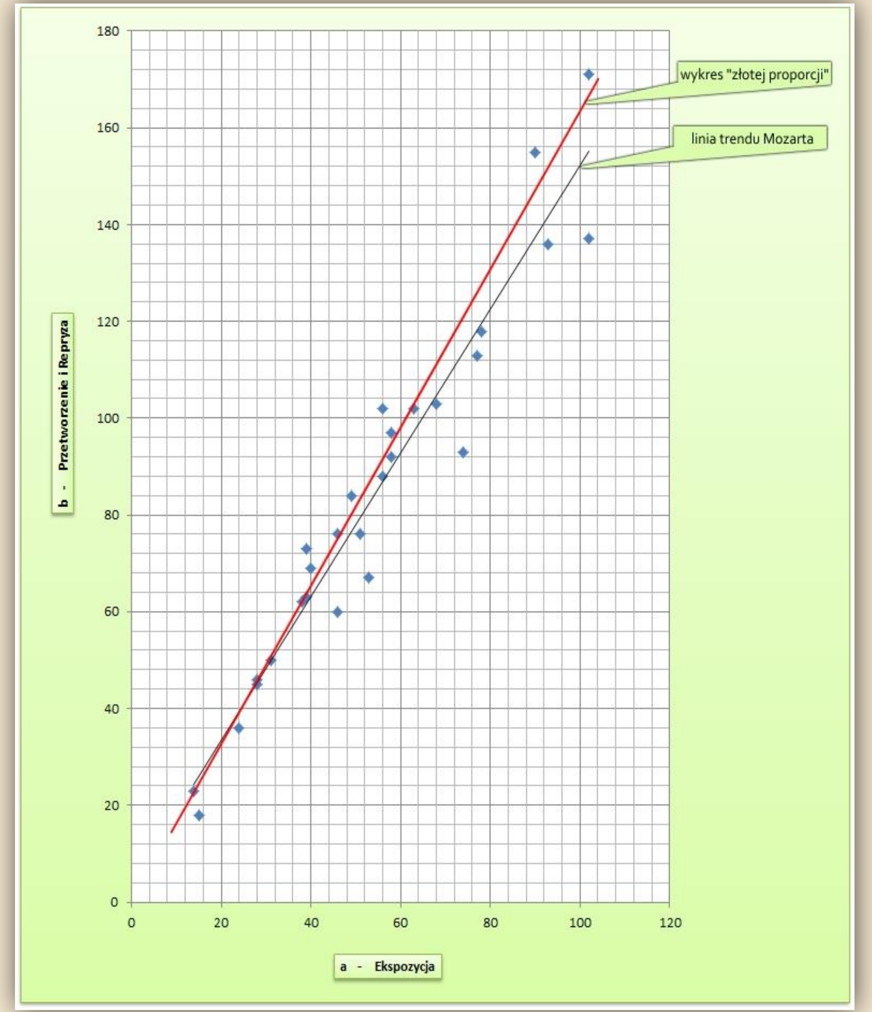
The Mathteacher PORTAL MATEMATYCZNY

Czy Mozart kierował się zasadami matematycznymi?

Wykres punktowy zależności $\frac{b}{a}$

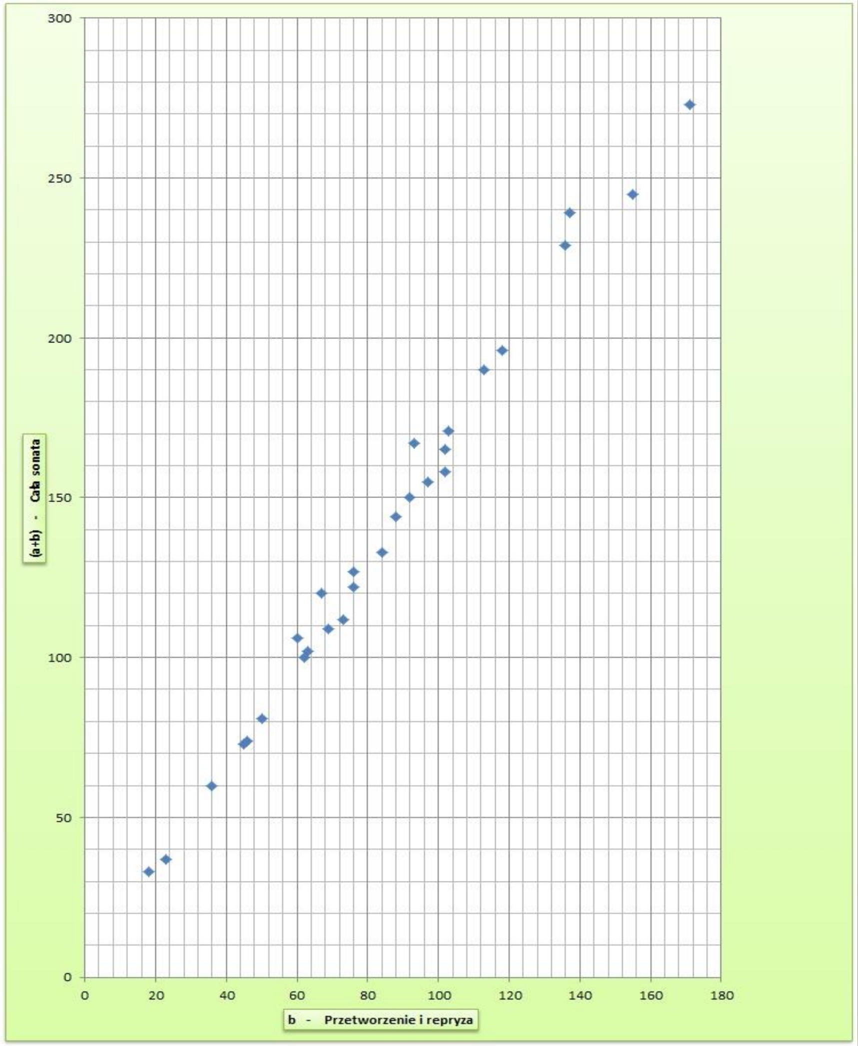


Wykres punktowy zależności $\frac{b}{a}$ wraz z linią trendu oraz wykres proporcjonalności prostej $y = \varphi x$ o współczynniku $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

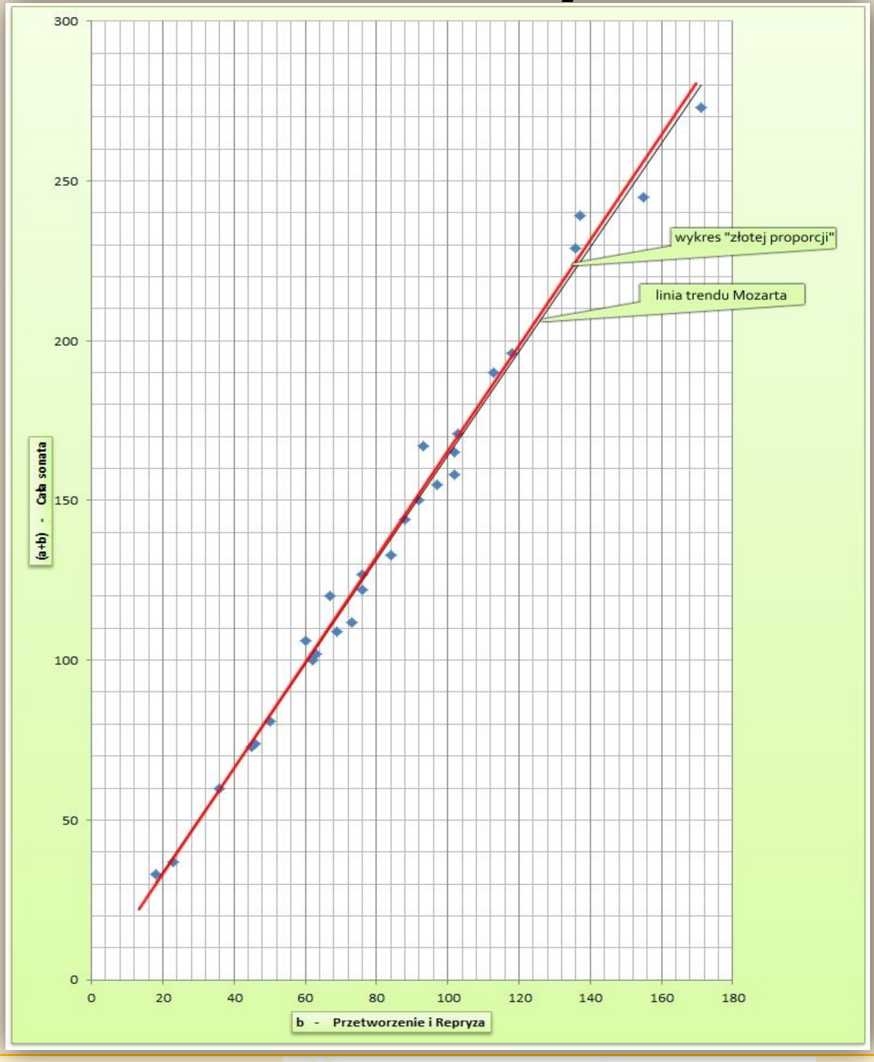


Czy Mozart kierował się zasadami matematycznymi?

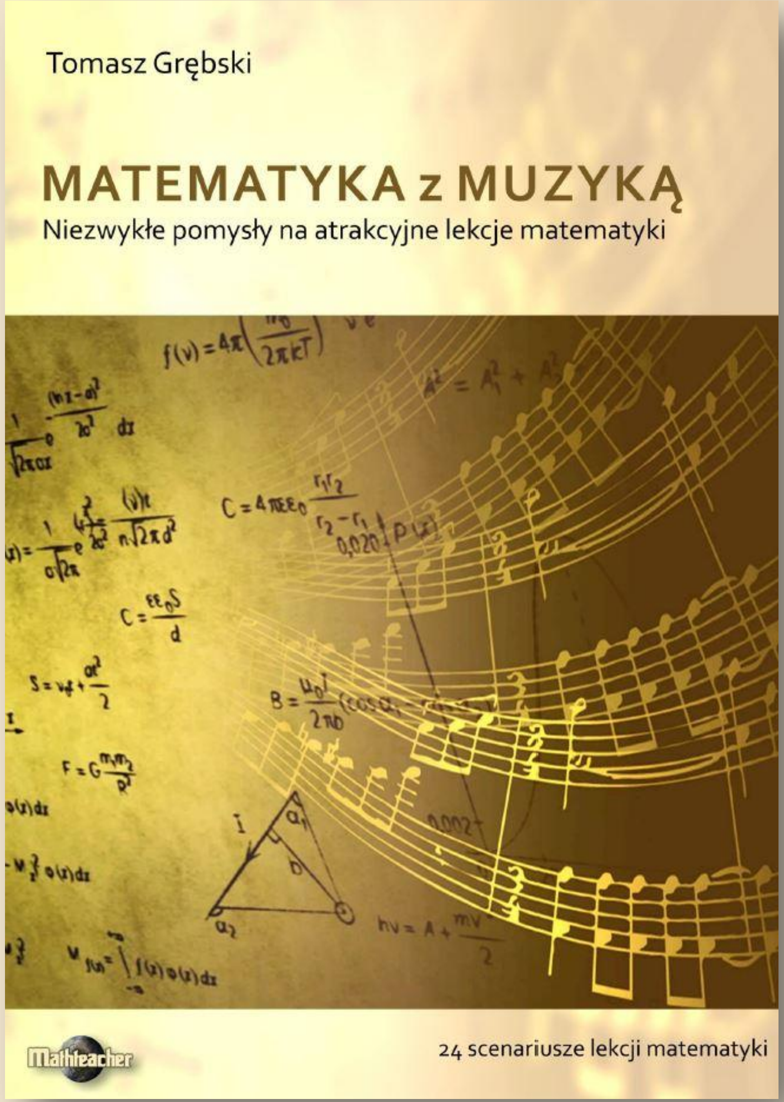
Wykres punktowy zależności $\frac{a+b}{b}$



Wykres punktowy zależności $\frac{a+b}{b}$ wraz z linią trendu oraz wykres proporcjonalności prostej $y = \varphi x$ o współczynniku $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$



Proponowane tematy związków matematyki z muzyką



Bibliografia

1. Cz. Kupisiewicz, *Podstawy dydaktyki ogólnej*, Polska Oficyna Wydawnicza „BGW", Warszawa 1995
2. *Enzyklopadie Erziehungswissenschaft*, Tom 1, Klett – Gotta Werlag, Berlin 1982
3. W. Okoń, *Słownik pedagogiczny*, Wyd.5, Warszawa 1995, PWN.
4. K. Denek, *Reforma systemu edukacji. Nadzieje i wątpliwości,* [w:] K. Denek i T. M. Zimny (red.), Edukacja Jutra. V Tatrzańskie Seminarium Naukowe, Częstochowa: Menos 1999
5. J. Uszyńska-Jarmoc, *Czego nie wiemy o twórczości w szkole? Obszary zdeformowane, ignorowane i/lub zaniedbane*. Chowanna, 1(36)
6. R. Schulz, *Studia z innowatyki pedagogicznej,* Toruń: Wydawnictwo Naukowe UMK 1996
7. W. Okoń, *Nauczanie problemowe we współczesnej szkole*, Warszawa WSiP 1975
8. A.Kwatera, *Zróżnicowania szkoły: wielość modeli i ofert systemu edukacyjnego - alternatywa dla tradycji,* [w:] S. Kowal i M. Mądry-Kupiec (red.), Przygotowanie do wykonywania zawodu nauczyciela: w stronę edukacji spersonalizowanej, Będzin: Wydawnictwo internetowe e-bookowo 2015
9. H. Rowid, *Szkoła twórcza: podstawy teoretyczne i drogi urzeczywistnienia nowej szkoły*. Kraków, Gebethner i Wolff, 1931
10. S. Korczyński, *Nauczyciel epoki przemian*, Uniwersytet Opolski, Opole 2005
11. W. Nowak, *Konserwatorium z dydaktyki matematyki,* PWN, Warszawa 1989
12. Z. Krygowska, *Koncepcja powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat 1960-1980,* Wyd. Nauk. WSP, Kraków 1981
13. L. Dormolen, *Didaktic der Mathematic,* tłum. z holend., Vieweg, Braunschweig 1978 (informacja bibliograficzna: Dydaktyka Matematyki, t. 4, 1985)
14. M. Grzegorzewska, *Listy do młodego nauczyciela*, Wydawnictwo: Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej, Warszawa 1996
15. S. Dobrowolski, *Struktury umysłów nauczycieli,* PZWS, Warszawa 1959
16. J. Legowicz, *O nauczycielu. Filozofia nauczania i wychowania*, Warszawa 1975
17. S. Krawcewicz, *Zawód nauczycielski z badań nad doskonaleniem i samokształceniem*, Warszawa 1970
18. W. Okoń, *Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej*, Wydawnictwo Akademickie „Żak", Warszawa 1987
19. T.Grębski, K.Pancerz, P.Kulicki, *Experiments with Recognition of Melody Similarities Based on Human Independent Parameters*, International Conference on Information and Digital Technologies 2019 June 25th - 27th, 2019 Zilina, Slovakia.
20. T.Grębski, *Modelowanie matematyczne w muzyce na podstawie twórczości Iannisa Xenakisa*, Roczniki Kulturoznawcze, Tom X (1), Lublin 2019 r.
21. T.Grębski, *O relacjach między matematyką i muzyką,* Roczniki Kulturoznawcze 7 (4), Lublin 2016 r.
22. T.Grębski, *M jak Mozart, M jak Matematyka,* Matematyka nr 10, 2014 r.
23. T.Grębski, *Muzyka sfer,* Wiedza i Życie nr 9, 2015 r.
24. T.Grębski, *Usłyszeć geometrię i zobaczyć dźwięki*, Matematyka, nr 3, 2015 r.
25. A.Grębska, *Interdyscyplinarna osobowość nauczyciela XXI wieku, 2020.*

Niespodzianka ☺

Artykuły:

1. Modelowanie matematyczne w muzyce na podstawie twórczości Iannisa Xenakisa.
2. Relacje przedmiotowe i podmiotowe między matematyką a muzyką.
3. Symbole Pitagorejczyków.
4. Usłyszeć geometrię i zobaczyć dźwięki.

Wiele ciekawych pomysłów można znaleźć na portalu The Mathteacher – zapraszam!

Dziękuję za uwagę ☺

The Mathteacher
PORTAL MATEMATYCZNY

www.tomaszgrebski.pl